Podmínky na zápočet

- Docházka: 70% účast na cvičení
- Domácí úkoly: domácí úkoly se budou zadávat na cvičení. Z celkovéhe maximálního počtu 50 bodů je nutné dosáhnout 40 bodů. Na každém cvičení se zadají povětšinou dva úkoly, deadline odevzdání je v pátek před cvičením.
- Vyřešit simplexovou metodou zadanou úlohu lineárního programování. Deadline pro simplexovou úlohu je stejný jako pro ostatní úlohy, na rozdíl od domácích úkolů je možné špatně vyřešenou úlohu opravit.
- V případě nesplnění požadavků se bude další postup hodnotit individuálně.

Cvičení 1

Úkol 1. *(5 bodů)* V podniku pracují 3 skupiny S_1, S_2, S_3. Každá skupina může za týden zhotovit jednu ze 3 zakázek Z_1, Z_2, Z_3 a jedna zakázka může být zhotovena maximálně (a tedy právě) jednou skupinou. Kvalita a také cena zakázky závisí na tom, která skupina ji zhotovila. Předpokládané zisky v tisících Kč udává tabulka. Zapište úlohu přiřazení zakázek pracovním skupinám tak, aby se maximalizoval výsledný

	Z_1	Z_2	Z_3
S_1	4	3	2
S_2	6	4	3
S_3	4	4	4

celkový zisk. Úlohu pouze sestavte, nemusíte ji řešit.

Úkol 2. *(5 bodů)* Napište úlohu pro nalezení trojúhelníka s maximálním obsahem v množině všech trojúhelníků s pevně daným obvodem s. Účelová funkce může být nelineární, podmínky by měly být lineární. Oproti předchozímu úkolu je třeba vzniklý problém vyřešit.

Cvičení 2

Úkol 3. *(5 bodů)* Vyřešte následující dva úkoly:

(1) Nechť A má vlastnost, že existuje $c \in (0,1)$ takové, že pro všechna $x, y \in A$ také $cx+(1-c)y \in A$. Je potom nutně A konvexní? Změní se odpověď, pokud je A otevřená?

(2) Určete, zda je následující množina konvexní

$$M = \{(x,y) |\ x^2y^2 \geq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Úkol 4. *(5 bodů)* Rozhodněte, zda je následující funkce na $\mathbb{R} \times (0,\infty)$ konvexní

$$f(x,y) = 10\left(3\left(\frac{x^4}{y}\right)^4 + 8\left(\frac{x^4}{y}\right)^2 + 10\left(\frac{x^4}{y}\right) + 1\right)^8.$$

Cvičení 3

Úkol 5. *(5 bodů)* Řešte graficky následující úlohu:

$$\begin{array}{lrcrcl}
\max & 4x_1 & + & 2x_2 & & \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & x_1 & & & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Ukažte, jak by vypadalo řešení v případě minimalizace.

Úkol 6. *(5 bodů)* Za pomoci vybraného softwaru (doporučuji Matlab, Mathematicu, popřípadě GAMS) spočtěte následující úlohu

$$\begin{aligned} \max \ & \sum_{j=1}^{40} x_j \\ s.t.\ & Ax \le b \\ & 0 \le x_j \le 1, \end{aligned}$$

kde A je matice o rozměrech 10×40 s prvky $a_{ij} = (-1)^{i+j}(i - 1 + 4(j-1))$ pro $i = 1, \dots, 10$ a $j = 1, \dots, 40$. Vektor pravé strany je $b = (1, \dots, 1)$.

Jako řešení odevzdejte výsledek a kód ve vybraném softwaru.

Cvičení 4

Úkol 5a. *(2 body)* Vyřešte úkol 5 pomocí přímé metody. Minimalizaci v tomto případě provádět nemusíte.

Cvičení 5

Simplex. Za úkol bude vyřešit lineární problém pomocí simplexového algoritmu. Protože každý student dostane jiný problém, bude tento problém rozdán na hodině.

Úkol 7. *(8 bodů)* Vyřešte graficky duální úlohu k úloze

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \min & 5x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & \\ & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \ge & 2 \\ & x_1 & - & 3x_2 & & & \ge & -2 \\ & x_1 & & & & & \ge & 0 \\ & & & x_2 & & & \ge & 0 \\ & & & & & x_3 & \ge & 0 \end{array}$$

S využitím komplementarity nalezněte optimální řešení původní úlohy. Zapište pro výše uvedenou úlohu Farkasovu větu. Bude mít vzniká soustava řešení (odpovězte bez toho, abyste systém řešili.)

Cvičení 6

Úkol 8. *(5 bodů)* Najděte optimalizační problém a jeho přípustné řešení, pro které jsou splněny LPO, ale nejsou splněny GPO. Uveďte nějakou podmínku, za které platí ekvivalence.

Ukažte, že podmínka lineární nezávislosti není vlastností množiny, ale jejího zápisu. Najděte dvojici množiny A a jejího bodu $x \in A$, takové že A je zapsaná pomocí dvou systémů nerovnic takových, že jeden systém v x podmínku lineární nezávislosti splňuje a druhý ji v x nesplňuje.

Úkol 9. *(5 bodů)* Pomocí NLP nalezněte bod z množiny

$$\mathcal{M} = \left\{(x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \ge (x_2 - 1)^2, 2x_1 + x_2 \ge 2,\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\right\},$$

který je nejblíž bodu $[-1, 0]$.