4.4 NĚKTERÉ LIMITNÍ VĚTY TP

4.4.1 Zákon velkých čísel

Čebyševova nerovnost

Nechť X je náhodná veličina se střední hodnotou EX

a rozptylem $DX > 0$.

Pak pro každé reálné číslo $\epsilon > 0$ platí

$$P(\mid X - EX \mid \geq \epsilon) \leq \frac{DX}{\epsilon^2}.$$

Příklad (Čebyševova nerovnost)

Kolik je třeba zkontrolovat výrobků, abychom mohli s pravděpodobností ne menší než 0.95 *tvrdit, že absolutní hodnota rozdílu průměrného počtu dobrých výrobků z* n *kontrolovaných a pravděpodobnosti* $p = 0.9$, *že vyrobený výrobek bude dobrý, bude menší než* 0.01. Řešte pomocí Čebyševovy nerovnosti.

Řešení:

S_n – počet dobrých výrobků mezi n kontrolovanými

$p = 0.9$ – pst, že vyrobený výrobek bude dobrý

$$P(\mid \frac{S_n}{n} - 0.9 \mid \leq 0.01) \geq 0.95$$

$S_n \sim \mathcal{B}(n,p), \quad ES_n = np, \quad DS_n = np(1-p)$

$E(\frac{1}{n}S_n) = p, \quad D(\frac{1}{n}S_n) = \frac{1}{n^2}np(1-p) = \frac{1}{n}p(1-p)$

Podle Čeb. věty

$$P(\mid \frac{S_n}{n} - 0.9 \mid \geq 0.01) \leq \frac{p(1-p)}{n\, 0.01^2}$$

$$P(\mid \frac{S_n}{n} - 0.9 \mid \leq 0.01) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\, 0.01^2} = 0.95$$

$$n = \frac{0.90\ .\ 0.1}{0.05\ .\ 0.01^2} = 18000$$

Konvergence podle psti (stochastická konverg.):

Nechť $X_1, X_2, ...$ je posloupnost náhodných veličin,

c je reálné číslo.

Jestliže pro každé $\epsilon > 0$ platí

$$\lim_{n\to\infty} P(\mid X_n - c \mid > \epsilon) = O$$

pak X_n konverguje k c podle pravděpodobnosti.

$(X_n \to_p c)$

Bernoulliho věta

Nechť $X_1, X_2, ...$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s rozdělením $\mathcal{A}(p)$.

Označme $S_n = \Sigma_{i=1}^n X_i$.

Pak pro každé reálné číslo $\epsilon > 0$ platí

$$\lim_{n\to\infty} P(\mid \frac{S_n}{n} - p \mid > \epsilon) = 0.$$

Chinčinova věta

Nechť $X_1, X_2, ...$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin, $EX = \mu$.

Pak pro každé reálné číslo $\epsilon > 0$ platí

$$\lim_{n\to\infty} P(\mid \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \mid > \epsilon) = 0.$$

4.4.2 Centrální limitní věty (CLV)

Moivreova-Laplaceova věta.

Nechť $X_1, X_2, \ldots$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s alternativním rozdělením $\mathcal{A}(p)$.

Označme $S_n = \Sigma_{i=1}^{n} X_i, \quad Z_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq x) = \Phi(x),\ x \in R.$$

Linderbergova-Lévyho věta

Nechť $X_1, X_2, \ldots$ jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným rozdělením, které mají konečnou střední hodnotu μ a rozptyl σ^2.

Označme $Y_n = \Sigma_{i=1}^{n} X_i, \quad Z_n = \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$.

Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq x) = \Phi(x), \quad x \in R.$$