Řešení zápočtového testu

1 A

1.1 Zákon hromadění směrodatných odchylek

Rovinný trojúhelník je zadán dvěma stranami a úhlem jimi sevřeným. Hodnoty zadaných veličin a jejich směrodatné odchylky jsou uvedeny v následující tabulce.

veličina	hodnota	směrodatná odchylka
strana a	175.25 m	0.12 m
strana b	193.70 m	0.15 m
úhel γ	43.5792 gon	0.0080 gon

Určete směrodatnou odchylku plochy trojúhelníka.

Řešení

1. Obsah trojúhelníka: $S(a, b, \gamma) = \frac{1}{2}\, a\, b \sin(\gamma)$
2. Volba označení a fyzikálních jednotek:
   - $\tilde{a} := 175.25$ m,
   - $\tilde{b} := 193.70$ m,
   - $\widehat{\gamma} := \frac{\pi}{200}\, 43.5792\,\text{gon} = 0.68454$ rad,
   - $\sigma_a := 0.12$ m,
   - $\sigma_b := 0.15$ m,
   - $\sigma_\gamma := \frac{\pi}{200}\, 0.0080\,\text{gon} = 1.256637 \cdot 10^{-4}$ rad,
   - směrodatná odchylka plochy trojúhelníka: $\sigma_S = ?$
3. Zákon hromadění směrodatných odchylek:

$$\begin{aligned}
\sigma_S &= \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial a}(\tilde{a}, \tilde{b}, \widehat{\gamma}) \cdot \sigma_a\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial b}(\tilde{a}, \tilde{b}, \widehat{\gamma}) \cdot \sigma_b\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \gamma}(\tilde{a}, \tilde{b}, \widehat{\gamma}) \cdot \sigma_\gamma\right)^2} = \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\tilde{b}\, \sin(\widehat{\gamma}) \cdot \sigma_a\right)^2 + \left(\tilde{a}\, \sin(\widehat{\gamma}) \cdot \sigma_b\right)^2 + \left(\tilde{a}\, \tilde{b}\, \cos(\widehat{\gamma}) \cdot \sigma_\gamma\right)^2} = \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{15001.3 \cdot 0.0144 + 12279.6 \cdot 0.0225 + 691597281 \cdot 1.5791 \cdot 10^{-8}}\ \text{m}^2\,.
\end{aligned}$$

4. Odpověď:

   Směrodatná odchylka plochy trojúhelníka $\sigma_S = 11.22\,\mathrm{m}^2$.

1.2 Vyrovnání

Mezi třemi body, P_1, P_2, P_3, ležícími v jedné přímce, byly změřeny délky $s_{1,2}$, $s_{1,3}$, $s_{2,3}$, každá několikrát. Výsledky měření jsou uvedeny v následující tabulce. V posledním sloupci tabulky jsou směrodatné odchylky měřených délek.

i	j	$s_{i,j}$	$\sigma_{i,j}$
1	2	17.349 m	0.004 m
		17.341 m	
		17.352 m	
2	3	11.962 m	0.003 m
		11.957 m	
		11.959 m	
		11.963 m	
1	3	29.309 m	0.006 m
		29.302 m	

- Vyrovnejte všechny zadané měřené délky metodou nejmenších čtverců tak, abyste určili délky dvou úseků mezi body P_1, P_3. Vypočtěte vyrovnané délky úseků $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$.
- Jak byste odhadl/a přesnost výsledných vyrovnaných hodnot?

2 B

2.1 Zákon hromadění směrodatných odchylek

Rovinný trojúhelník je zadán dvěma úhly a stranou mezi jejich vrcholy. Hodnoty zadaných veličin a jejich směrodatné odchylky jsou uvedeny v následující tabulce.

veličina	hodnota	směrodatná odchylka
úhel α	50.5792 gon	0.0010 gon
úhel β	49.4318 gon	0.0010 gon
strana c	150.45 m	0.03 m

Určete směrodatnou odchylku strany proti menšímu úhlu.

Řešení

1. Vyjádření strany b trojúhelníka pomocí sinové věty: $b(\alpha, \beta, c) = \frac{c\,\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$
2. Volba označení a fyzikálních jednotek:
   - $\widehat{\alpha} := \frac{\pi}{200}\,50.5792\,\text{gon} = 0.794496\ \text{rad}$,
   - $\widehat{\beta} := \frac{\pi}{200}\,49.4318\,\text{gon} = 0.776473\ \text{rad}$,
   - $\tilde{c} := 150.45\ \text{m}$,
   - $\sigma_\alpha := \frac{\pi}{200}\,0.0010\,\text{gon} = 1.570796 \cdot 10^{-5}\ \text{rad}$,
   - $\sigma_\beta := \frac{\pi}{200}\,0.0010\,\text{gon} = 1.570796 \cdot 10^{-5}\ \text{rad}$,
   - $\sigma_c := 0.03\ \text{m}$,
   - směrodatná odchylka strany b trojúhelníka: $\sigma_b = ?$.
3. Zákon hromadění směrodatných odchylek:

$$
\begin{aligned}
\sigma_b &= \sqrt{\left(\frac{\partial b}{\partial \alpha}(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \tilde{c}) \cdot \sigma_\alpha\right)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial \beta}(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \tilde{c}) \cdot \sigma_\beta\right)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial c}(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \tilde{c}) \cdot \sigma_c\right)^2} = \\
&= \sqrt{\left(\frac{c\,\sin(\beta)\,\cos(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)} \cdot \sigma_\alpha\right)^2 + \left(\frac{c\,\sin(\alpha)}{\sin^2(\alpha+\beta)} \cdot \sigma_\beta\right)^2 + \left(\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot \sigma_c\right)^2} = \\
&= \sqrt{0.000331862 \cdot 2.46740 \cdot 10^{-10} + 11523.5 \cdot 2.46740 \cdot 10^{-10} + 0.491075 \cdot 0.0009}\,\text{m}
\end{aligned}
$$

4. Odpověď:

   Směrodatná odchylka strany b trojúhelníka $\sigma_b = 0.021\,\text{m}$.

2.2 Vyrovnání

Výška barevně odlišeného segmentu válcového komína byla určena trigonometricky pomocí zenitových úhlů změřených ze dvou stanovisek. Vodorovné vzdálenosti stanovisek od paty komína a měřené hodnoty zenitových úhlů spolu s jejich směrodatnými odchylkami jsou uvedeny v následující tabulce.

i	j	s_i	$z_{i,j}$	$\sigma_{z,i,j}$
1	1	23.28 m	90.2323 gon	0.0012 gon
1	2	23.28 m	59.4917 gon	0.0016 gon
2	1	30.08 m	93.4629 gon	0.0012 gon
2	2	30.08 m	67.6813 gon	0.0014 gon

Vzdálenosti stanovisek od paty komína považujte za bezchybné.

- Měřené zenitové úhly vyrovnejte metodou nejmenších čtverců a vypočtěte výšku segmentu komína.
- Jak byste odhadl/a přesnost vyrovnané výšky segmentu?

Řešení

1. Vyjádření měřených veličin pomocí neznámých (zprostředkující rovnice):

$$
\begin{aligned}
z_{1,1} &= \arctan\left(\frac{s_1}{x_1}\right) =: a_1(x_1,\, x_2,\, x_3) \\
z_{1,2} &= \arctan\left(\frac{s_1}{x_1 + x_3}\right) =: a_2(x_1,\, x_2,\, x_3) \\
z_{2,1} &= \arctan\left(\frac{s_2}{x_2}\right) =: a_3(x_1,\, x_2,\, x_3) \\
z_{2,2} &= \arctan\left(\frac{s_2}{x_2 + x_3}\right) =: a_4(x_1,\, x_2,\, x_3)
\end{aligned}
$$

2. Volba označení a fyzikálních jednotek:

   - $\overset{\frown}{z}_{1,1} := \frac{\pi}{200}\, 90.2323\,\text{gon} = 1.417366$ rad,
   - $\overset{\frown}{z}_{1,2} := \frac{\pi}{200}\, 59.4917\,\text{gon} = 0.9344934$ rad,
   - $\overset{\frown}{z}_{2,1} := \frac{\pi}{200}\, 93.4629\,\text{gon} = 1.468112$ rad,
   - $\overset{\frown}{z}_{2,2} := \frac{\pi}{200}\, 67.6813\,\text{gon} = 1.063135$ rad,
   - $\tilde{\mathbf{t}} := [\overset{\frown}{z}_{1,1},\, \overset{\frown}{z}_{1,2},\, \overset{\frown}{z}_{2,1},\, \overset{\frown}{z}_{2,2}]^T$,
   - $\mathbf{x} := [x_1,\, x_2,\, x_3]^T$,
   - $\mathbf{x}^\circ = [3.6002,\, 3.0997,\, 13.6165]^T$,
   - $\mathcal{A} := [a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4]^T$,
   - $\mathbf{l} := \tilde{\mathbf{t}} - \mathcal{A}(\mathbf{x}^\circ) = 10^{-4} \cdot [0,\, 4.7501,\, 0,\, -4.3424]^T$,
   - $\mathbf{A} := -\begin{bmatrix} 0.041952 & , & 0 & , & 0 \\ 0.027768 & , & 0 & , & 0.027768 \\ 0 & , & 0.032895 & , & 0 \\ 0 & , & 0.025400 & , & 0.025400 \end{bmatrix}$,
   - $\sigma_{z,1,1} := \frac{\pi}{200}\, 0.0012\,\text{gon} = 1.8850 \cdot 10^{-5}$ rad,
   - $\sigma_{z,1,2} := \frac{\pi}{200}\, 0.0016\,\text{gon} = 2.5133 \cdot 10^{-5}$ rad,
   - $\sigma_{z,2,1} := \frac{\pi}{200}\, 0.0012\,\text{gon} = 1.8850 \cdot 10^{-5}$ rad,
   - $\sigma_{z,2,2} := \frac{\pi}{200}\, 0.0014\,\text{gon} = 2.1991 \cdot 10^{-5}$ rad,

- $P := \text{diag}([2.8145 \cdot 10^9,\, 1.5831 \cdot 10^9,\, 2.8145 \cdot 10^9,\, 2.0678 \cdot 10^9])$,
- hledané převýšení: $x_3 = ?$

3. Rovnice oprav:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{t}} + \boldsymbol{\varepsilon} &\doteq \mathcal{A}(\mathbf{x}^\circ) + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^\circ)\,, \quad \mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon} \ldots \text{neznámé}\,, \\
\mathbf{v}(\mathbf{r}) &:= \boldsymbol{\varepsilon} \doteq \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{l}\,, \qquad \mathbf{r} := \mathbf{x} - \mathbf{x}^\circ \ldots \text{redukované neznámé}\,,
\end{aligned}$$

4. podmínka metody nejmenších čtverců:

$$(\mathbf{v}(\hat{\mathbf{r}}))^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}(\hat{\mathbf{r}}) = \min_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3} (\mathbf{v}(\mathbf{r}))^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r})$$

5. řešení soustavy normálních rovnic:

$$\hat{\mathbf{r}} = \left(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}\right)^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{l}\,,$$

6. přechod k původním (neredukovaným) neznámým:

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{r}} + \mathbf{x}^\circ\,.$$

7. Odpověď:

   Hledané převýšení $x_3 = 13.6160\,\text{m}$. Jeho směrodatná odchylka je odmocnina třetího diagonálního prvku matice $\left(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}\right)^{-1}$, tj. 0.7 mm.

12. ledna 2018

Lubomír Soukup

soukup@utia.cas.cz