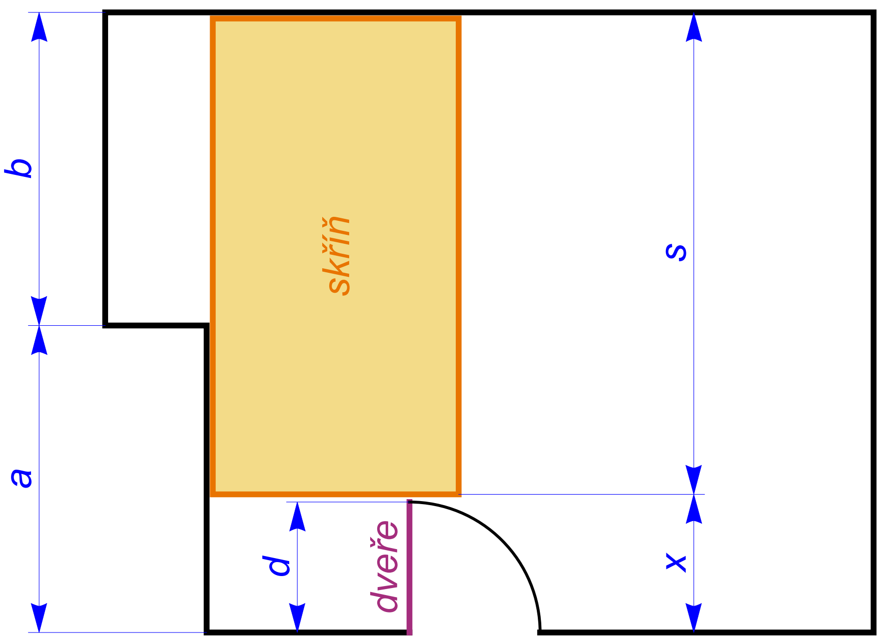
Rozdělení pravděpodobnosti diskrétních náhodných veličin

Zadání

V obdélníkovém pokoji je výklenek, který je zakryt velkou skříní. Naproti skříni jsou dveře, které se otevírají dovnitř. Rozměry pokoje, skříně a dveří udávají délky a, b, s, d, x — viz. obrázek 1.



Obrázek 1: půdorys pokoje se skříní

Délkám a, b, s, d, x odpovídají diskrétní náhodné veličiny A, B, S, D, X. Rozdělení pravděpodobnosti náhodných veličin A, B, S, D jsou zadána prostřednictvím pravděpodobnostních funkcí p_A, p_B, p_S, p_D.

Po určité době od stanovení rozdělení pravděpodobnosti náhodných veličin A, B, S vzniklo podezření, že někdo manipuloval se skříní (chtěl si něco vzít z výklenku). Aby bylo možno toto podezření prověřit, byla změřena délka x. Měření bylo provedeno několikrát nezávisle jedním přístrojem za stálých podmínek, které zaručily stejnou přesnost přístroje v průběhu celého měření. Chyby měření mají tedy náhodný charakter a odpovídá jim diskrétní náhodná veličina $\mathcal{E}_X$. Předpokládáme, že rozdělení pravděpodobnosti měřických chyb $\mathcal{E}_X$ je známo.

Náhodné veličiny $\mathcal{E}_X$, X, A, B, S mají posunuté binomické rozdělení (viz. (1), (2)), náhodná veličina D má rovnoměrné rozdělení s konstantní pravděpodobnostní funkcí

$$p_D(x) := \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{pro } x \in \{d-2,\, d-1,\, d,\, d+1,\, d+2\}\ , \\ 0 & \text{pro } |x-d| > 2\ . \end{cases}$$

Pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny U, $U \in \{\mathcal{E}_X, X, A, B, S\}$, je definována pomocí binomického rozdělení pravděpodobnosti $\mathrm{Bi}(n_U,\, q_U)$ následovně:

$$p_U(z) := p(z + \mathrm{floor}\left(\frac{n_U}{2}\right) - u)\ , \tag{1}$$

přičemž p je pravděpodobnostní funkce binomického rozdělení $\mathrm{Bi}(n_U,\, q_U)$.

$$p(k) := \begin{cases} \binom{n_U}{k} q_U^k (1-q_U)^{n_U-k} & \text{pro } k \in \{0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, n_U\}\ , \\ 0 & \text{jinak}\ . \end{cases} \tag{2}$$

Symbol u zastupuje některou z veličin $\hat{\varepsilon}_X$, x, a, b, s, tzn. $u \in \{\hat{\varepsilon}_X, x, a, b, s\}$. Dále předpokládáme, že $\hat{\varepsilon}_X := 0$.

Funkce $\mathrm{floor}(x)$ představuje celou část čísla x, tj.

$$\mathrm{floor}(x) := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}\ .$$

Součet diskrétních náhodných veličin A, B je opět náhodná veličina; označíme ji C. Její pravděpodobnostní funkci p_C lze určit podle vztahu

$$p_C(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{a=a_{\min}}^{a_{\max}} p_A(a)p_B(x-a) & \text{pro } x \in \{a_{\min}+b_{\min}, a_{\min}+b_{\min}+1, \ldots, a_{\max}+b_{\max}\}\ , \\ 0 & \text{jinak}\ . \end{cases}$$

Podobně se určí i pravděpodobnost rozdílu diskrétních náhodných veličin.

Hodnoty $a_{\min}$, $a_{\max}$, příp. $b_{\min}$, $b_{\max}$ představují minimální a maximální možné hodnoty náhodnné veličiny A, příp. B.

$$\begin{aligned} a_{\min} &:= \min\{a \in \mathbb{Z} \mid p_A(a) \neq 0\} \\ a_{\max} &:= \max\{a \in \mathbb{Z} \mid p_A(a) \neq 0\} \\ b_{\min} &:= \min\{b \in \mathbb{Z} \mid p_B(b) \neq 0\} \\ b_{\max} &:= \max\{b \in \mathbb{Z} \mid p_B(b) \neq 0\} \end{aligned}$$

Úkoly

1. Zvolte hodnoty veličin a, b, s tak, aby $a + b - s \doteq 900$. Položte $d := 900$. Zvolte parametry binomických rozdělení $\mathrm{Bi}(n_U, q_U)$ pro $U \in \{A, B, S\}$ tak, aby $n_A \neq n_B \neq n_S$.

2. Určete rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny $A + B - S$ a nakreslete jeho pravděpodobnostní funkci.

3. Jaká je pravděpodobnost, že půjdou otevřít dveře dokořán, aniž by narazily do skříně?

4. Zvolte $x^* \doteq 900$. Zvolte parametry n_X, q_X binomického rozdělení $\mathrm{Bi}(n_X, q_X)$. Vygenerujte několik měření z rozdělení odpovídajícího náhodné veličině $X = x^* + \mathcal{E}_X$ a zapomeňte hodnotu x^*. Určete rozdělení pravděpodobnosti **parametru polohy** náhodné veličiny X pomocí Bayesova vzorce. Apriorní rozdělení předpokládejte rovnoměrné na vhodně zvoleném intervalu. Nakreslete pravděpodobnostní funkci **parametru polohy** náhodné veličiny X.

5. Jaká je pravděpodobnost, že skříň byla posunuta?

23. října 2017

Lubomír Soukup

soukup@utia.cas.cz