Odhad střední chyby výměry parcely

Lubomír Soukup

Ústav teorie informace a automatizace
Akademie věd České republiky
Pod vodárenskou věží 4
182 08 Praha 8
tel: 266 052 551
e–mail: `soukup@utia.cas.cz`

1 Výpočet obsahu mnohoúhelníka

Je dána parcela tvaru mnohoúhelníka. Vrcholy tohoto mnohoúhelníka jsou dány kartézskými souřadnicemi $X_i\,, Y_i$. Obsah P tohoto mnohoúhelníka (výměru dané parcely) lze určit pomocí l'Huillierova vzorce (viz např. [2], kap. 4.1.2.):

$$P = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i\,Y_{i+1} \;-\; X_{i+1}\,Y_i \,, \tag{1}$$

kde

$X_i\,, Y_i$ ... souřadnice i-tého vrcholu mnohoúhelníka, $i \in \{0,\,1,\ldots,n{+}1\}$ při vzestupném číslování ve směru orientace souřadnicových os, tj. tak, aby při obcházení parcely ve směru číslování vrcholů ležela parcela stále po levé ruce (pro matematický souřadnicový systém),

n ... počet všech vrcholů mnohoúhelníka.

Přitom pro číslování bodů platí konvence:

$$\begin{aligned} X_0 &= X_n\,, & X_1 &= X_{n+1}\,,\\ Y_0 &= Y_n\,, & Y_1 &= Y_{n+1}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

2 Formulace problému

Je třeba odhadnout střední chybu obsahu (1) mnohoúhelníka v závislosti na poloze a přesnosti jeho vrcholů. Přitom se předpokládá, že souřadnice $X_i\,, Y_i$ vrcholů mnohoúhelníka jsou nezávislé náhodné veličiny s konečným rozptylem.

Dáno:

- souřadnice $\hat{x}_i\,, \hat{y}_i$ vrcholů mnohoúhelníka, které jsou středními hodnotami náhodných veličin $X_i\,, Y_i$, $\mathrm{i} \in \{1, \ldots, n\}$,
- střední chyby $\sigma_{X,i}$, $\sigma_{Y,i}$ souřadnic $X_i\,, Y_i$, $\mathrm{i} \in \{1, \ldots, n\}$.

Hledá se: Střední chyba σ_P obsahu P daného vzorcem (1).

3 Odvození střední chyby obsahu mnohoúhelníka

Souřadnice $X_i\,, Y_i$ vrcholů mnohoúhelníka jsou náhodné veličiny, a proto i jeho obsah P je náhodná veličina.

Střední chyba obecné náhodné veličiny U je definována vztahem

$$\sigma_U := \sqrt{\mathrm{var}(U)}\ . \tag{3}$$

Variance náhodné veličiny U je definována pomocí operátoru střední hodnoty ... E (viz. např. [1], str. 14).

$$\mathrm{var}(U) := E((U - E(U))^2) = E(U^2) - (E(U))^2\ . \tag{4}$$

Podobně je definován obecnější pojem, kovariance dvou náhodných veličin U, V(viz. např. [1], str. 27):

$$\mathrm{cov}(U, V) := E((U - E(U))(V - E(V))) = E(UV) - E(U)E(V)\ . \tag{5}$$

Z definic (4), (5) je vidět, že platí

$$\mathrm{var}(U) = \mathrm{cov}(U, U)\ . \tag{6}$$

Nejdříve určíme varianci dvojnásobku obsahu P

$$Q := 2\,P\ .$$

S využitím definice (4) a linearity operátoru E tudíž platí:

$$\mathrm{var}(Q) = 4\,\mathrm{var}(P)$$

(viz též např. [1], str. 14).

Pak bude

$$\sigma_P = \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{var}(Q)} \tag{7}$$

3.1 Variance dvojnásobku obsahu mnohoúhelníka

Vhodný vzorec pro výpočet dvojnásobku obsahu mnohoúhelníka dostaneme úpravou (1).

$$Q = 2\,P = \sum_{m=0}^{1-z} \sum_{i=m}^{nz+n+m-1} S_{m,i} \;, \tag{8}$$

kde

$$\begin{aligned} z &= n \bmod 2\,, \\ S_{m,i} &:= (-1)^a\, W_{a,i}\, W_{1-a,i+1} \;, \quad a := (i+1-m) \bmod 2\,, \\ W_{0,j} &:= X_{j \bmod n}\,, \\ W_{1,j} &:= Y_{j \bmod n}\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Poslední dva vztahy zobecňují konvenci (2).

Infixový operátor mod představuje zbytek po dělení levého operandu pravým operandem, tj.

$$x \bmod y := x - y \max\{\, k \in \mathbb{Z} \mid k\,y \le x \,\}\;.$$

Potom

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(Q) &= \sum_{m=0}^{1-z} \mathrm{var}\left(\sum_{i=m}^{nz+n+m-1} S_{m,i} \right) = \\ &= \sum_{m=0}^{1-z} \left(\sum_{i=m}^{nz+n+m-1} \mathrm{var}(S_{m,i}) + 2 \sum_{i=m}^{nz+n+m-1} \sum_{j=i+1}^{nz+n+m-1} \mathrm{cov}(S_{m,i}\;, S_{m,j}) \right) = \\ &= \sum_{m=0}^{1-z} \left(\sum_{i=m}^{nz+n+m-1} \mathrm{var}(S_{m,i}) + 2 \sum_{i=m}^{nz+n+m-1} \mathrm{cov}(S_{m,i}\;, S_{m,i+1}) \right)\;. \end{aligned} \tag{10}$$

Při předchozích úpravách jsme postupně použili vztah (6) spolu s linearitou operátoru E (příp. přímo vzorec (17) na str. 29 v [1]) a rovnosti

$$\mathrm{cov}(S_{m,i}\;, S_{m,j}) = 0 \quad \text{pro } j > i+1\;,$$

která je přímým důsledkem definice (9).

Pro pokračování odvozování (10) je nutné rozepsat výrazy $\mathrm{var}(S_{m,i})$, $\mathrm{cov}(S_{m,i}\;, S_{m,i+1})$. K tomu nám poslouží vzorce

$$\mathrm{var}(TU) = \mathrm{var}(T)\mathrm{var}(U) + \mathrm{var}(T)(E(U))^2 + \mathrm{var}(U)(E(T))^2 \ , \tag{11}$$

$$\mathrm{cov}(TU, UV) = E(T)E(V)\mathrm{var}(U) \ , \tag{12}$$

které lze snadno odvodit z definic (4), (5) s využitím linearity operátoru E.

Aplikujeme-li nyní vzorce (11), (12) na součiny

$$TU = S_{m,i} = (-1)^m \, W_{m,i} \, W_{1-m,i+1} \ ,$$
$$UV = S_{1-m,i+1} = -(-1)^m \, W_{1-m,i+1} \, W_{m,i+2}$$

a zavedeme-li úspornější označení

$$\sigma^2_{a,i} \ := \ \mathrm{var}(W_{a,i}) \ , \tag{13}$$
$$\widehat{w}_{a,i} \ := \ E(W_{a,i}) \ , \tag{14}$$

dostáváme další pokračování odvození (10):

$$\mathrm{var}(Q) = \sum_{m=0}^{1-z} \sum_{i=m}^{nz+n+m-1}$$
$$\left(\sigma^2_{m,i}\sigma^2_{1-m,i+1} + \sigma^2_{m,i}\widehat{w}^2_{1-m,i+1} + \sigma^2_{1-m,i+1}\widehat{w}^2_{m,i} - 2\sigma^2_{1-m,i+1}\widehat{w}_{m,i}\widehat{w}_{m,i+2}\right) =$$
$$= \sum_{m=0}^{1-z} \sum_{i=m}^{nz+n+m-1} \left(\sigma^2_{m,i}\sigma^2_{1-m,i+1} + \sigma^2_{m,i}\widehat{w}^2_{1-m,i+1}\right) +$$
$$+ \sum_{m=0}^{1-z} \sum_{i=m}^{nz+n+m-1} \sigma^2_{1-m,i+1}\left(\widehat{w}^2_{m,i} - 2\widehat{w}_{m,i}\widehat{w}_{m,i+2}\right) =$$
$$= \sum_{m=0}^{1-z} \sum_{i=m}^{nz+n+m-1} \left(\sigma^2_{m,i}\sigma^2_{1-m,i+1} + \sigma^2_{m,i}\widehat{w}^2_{1-m,i+1}\right) +$$
$$+ \sum_{m=0}^{1-z} \sum_{i=m}^{nz+n+m-1} \sigma^2_{m,i}\left(\widehat{w}^2_{1-m,i-1} - 2\widehat{w}_{1-m,i-1}\widehat{w}_{1-m,i+1}\right) =$$
$$= \sum_{m=0}^{1-z} \sum_{i=m}^{nz+n+m-1} \sigma^2_{m,i}\sigma^2_{1-m,i+1} +$$
$$+ \sum_{m=0}^{1-z} \sum_{i=m}^{nz+n+m-1} \sigma^2_{m,i}\left(\widehat{w}^2_{1-m,i-1} - 2\widehat{w}_{1-m,i-1}\widehat{w}_{1-m,i+1} + \widehat{w}^2_{1-m,i+1}\right) =$$

$$= \sum_{m=0}^{1-z} \sum_{i=m}^{nz+n+m-1} \sigma^2_{m,i}\sigma^2_{1-m,i+1} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{1-z} \sum_{i=m}^{nz+n+m-1} \sigma^2_{m,i} \left(\widehat{w}_{1-m,i-1} - \widehat{w}_{1-m,i+1}\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sigma^2_{X,i} \left(\sigma^2_{Y,i-1} + \sigma^2_{Y,i+1}\right) + \sigma^2_{Y,i} \left(x_{i+1} - x_{i-1}\right)^2 + \sigma^2_{X,i} \left(y_{i+1} - y_{i-1}\right)^2 .$$

3.2 Střední chyba obsahu mnohoúhelníka

Nyní již můžeme díky (7) rovnou psát výsledný vzorec pro střední chybu obsahu mnohoúhelníka.

$$\sigma_P = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Big(\sigma^2_{X,i} \left(\sigma^2_{Y,i-1} + \sigma^2_{Y,i+1}\right) + \sigma^2_{Y,i} \left(\hat{x}_{i+1} - \hat{x}_{i-1}\right)^2 + \sigma^2_{X,i} \left(\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_{i-1}\right)^2 \Big)} \tag{15}$$

Předpokládáme-li, že přesnost určení polohy všech vrcholů mnohoúhelníka je stejná a nezávislá na poloze souřadnicových os, vzorec (15) se zjednoduší na konečný, prakticky použitelný tvar (17). V něm je symbol σ_{XY} střední souřadnicovou chybou, neboť předpokládáme

$$\sigma_{XY} := \sigma_{X,i} = \sigma_{Y,i} \quad \text{pro } \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}\,. \tag{16}$$

$$\sigma_P = \frac{\sigma_{XY}}{2} \sqrt{2\, n\, \sigma^2_{XY} + \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\hat{x}_{i+1} - \hat{x}_{i-1}\right)^2 + \left(\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_{i-1}\right)^2\right)} \quad , \tag{17}$$

přičemž pro číslování bodů platí vztahy:

$$\begin{array}{lll} \hat{x}_0 = \hat{x}_n\,, & \hat{x}_1 = \hat{x}_{n+1}\,, \\ \hat{y}_0 = \hat{y}_n\,, & \hat{y}_1 = \hat{y}_{n+1}\,. \end{array} \tag{18}$$

4 Závěr

Za předpokladu, že souřadnice $\hat{x}_i, \hat{y}_i$ lomových bodů parcely (vrcholů mnohoúhelníka) byly určeny stejně přesně (viz (16)) a vzájemně nezávisle, platí pro střední chybu výměry parcely σ_P vzorec (17).

Použitá literatura

[1] Jiří Anděl. *Matematická statistika.* SNTL, Praha, 1978.

[2] Hans-Jochen Bartsch. *Matematické vzorce.* SNTL, Praha, 1987.