# Shodnostní Helmertova transformace

Toto pojednání ukazuje, jak lze určit transformační koeficienty Helmertovy transformace za požadavku, aby představovaly shodnostní transformaci.

Pro jednoduchost budeme zpočátku přepokládat, že souřadnice identických bodů v obou souřadnicových soustavách byly redukovány k jejich těžišti.

$\hat{\mathbf{x}}_T$ ... souřadnice těžiště identických bodů v cílové souřadnicové soustavě

$\hat{\mathbf{x}}'_T$ ... souřadnice těžiště identických bodů v místní souřadnicové soustavě

$\hat{\mathbf{x}}_i$ ... souřadnice $i$-tého identického bodu v cílové souřadnicové soustavě

$\hat{\mathbf{x}}'_i$ ... souřadnice $i$-tého identického bodu v místní souřadnicové soustavě

$n$ ... počet identických bodů, $n \in \mathbb{N}$.

$$\hat{\mathbf{x}}_T := \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{\mathbf{x}}_i}{n} ,$$

$$\hat{\mathbf{x}}'_T := \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{\mathbf{x}}'_i}{n} ,$$

$$\hat{\mathbf{x}}_i := [\hat{x}_i, \hat{y}_i]^T , \qquad \hat{\mathbf{x}}'_i := [\hat{x}'_i, \hat{y}'_i]^T , \qquad i \in \{ 1, 2, \ldots, n \} ,$$

# 1 Klasická Helmertova transformace (podobnostní)

## 1.1 Formulace

Transformační rovnice pro libovolný podrobný bod $P$ s redukovanými souřadnicemi

$$\mathbf{x}_P = \hat{\mathbf{x}}_P - \hat{\mathbf{x}}_T ,$$

$$\mathbf{x}'_P = \hat{\mathbf{x}}'_P - \hat{\mathbf{x}}'_T$$

mají jednoduchý tvar:

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}'_P .$$

Matice

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_X, & -h_Y \\ h_Y, & h_X \end{bmatrix}$$

představuje rotaci souřadnicových os kolem těžiště spolu se změnou měřítka.

**Zprostředkující rovnice:**

$$\mathbf{Ah} = \mathbf{x} + \mathbf{v} \tag{1}$$

- $\mathbf{A}$ … matice typu $2n \times 2$ složená z bloků $\begin{bmatrix} x_i', & -y_i' \\ y_i', & x_i' \end{bmatrix}$, $i \in \{\,1,\,2,\ldots,\,n\,\}$
- $x_i',\, y_i'$ … souřadnice $i$-tého identického bodu v místní soustavě,
- $\mathbf{h}$ … koeficienty podobnostní transformace, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{h} := [h_X,\, h_Y]^T$ ,
- $\mathbf{x}$ … vektor (sloupcový) souřadnic identických bodů v cílové soustavě, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$, $\mathbf{x} := [x_1,\, y_1,\, x_2,\, y_2,\, \ldots\, x_n,\, y_n]^T$,
- $\mathbf{v}$ … opravy souřadnic identických bodů v cílové soustavě, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2n}$,

**Podmínka MNČ:**

$$\mathbf{v}^T\mathbf{v} \to \min \;\Leftrightarrow\; \mathbf{v}^T\mathbf{v} = \min_{\mathbf{h}\in\mathbb{R}^2} (\mathbf{Ah} - \mathbf{x})^T(\mathbf{Ah} - \mathbf{x}) \tag{2}$$

### 1.2 Řešení

**Normální rovnice:**

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{h} = \mathbf{A}^T\mathbf{x}\ , \tag{3}$$

$$\mathbf{h} = \left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1} \cdot \mathbf{A}^T\mathbf{x}\ . \tag{4}$$

## 2 Upravená Helmertova transformace (shodnostní)

### 2.1 Formulace

Transformační rovnice pro libovolný podrobný bod $P$ s redukovanými souřadnicemi $\mathbf{x}_P$, $\mathbf{x}_P'$ :

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{R} \cdot \mathbf{x}_P'\ .$$

Matice

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_X, & -r_Y \\ r_Y, & r_X \end{bmatrix}\ ,$$

tzv. matice rotace, představuje rotaci souřadnicových os kolem těžiště.

Z transformačních koeficientů $r_X$, $r_Y$ utvoříme dvojrozměrný vektor

$$\mathbf{r} = [\,r_X\ ,\ r_Y\,]^T\ .$$

**Zprostředkující rovnice s podmínkou:**

$$\begin{aligned} \mathbf{Ar} &= \mathbf{x} + \mathbf{v}\ , \\ \mathbf{r}^T\mathbf{r} &= 1\ , \end{aligned} \tag{5}$$

**Podmínka MNČ:**

$$\mathbf{v}^T\mathbf{v} = \min_{\mathbf{r}\in\mathcal{K}}(\mathbf{A}\mathbf{r}-\mathbf{x})^T(\mathbf{A}\mathbf{r}-\mathbf{x})\ , \tag{6}$$

přičemž množinou $\mathcal{K}$ je kružnice

$$\mathcal{K} := \{\mathbf{r}\in\mathbb{R}^2 | \mathbf{r}^T\mathbf{r} = 1\}\ .$$

## 2.2 Řešení

Podmínka (6) zahrnuje podmínku MNČ (2) současně s podmínkou (5). Jejího splnění lze dosáhnout minimalizací tzv. Lagrangeovy funkce $\Omega$.

$$\Omega(\mathbf{r}) := (\mathbf{A}\mathbf{r}-\mathbf{x})^T\,(\mathbf{A}\mathbf{r}-\mathbf{x}) + (\mathbf{r}^T\mathbf{r}-1)\,k\ \ , \tag{7}$$

kde $k\in\mathbb{R}$ je Lagrangeova násobná konstanta (koreláta), jejíž existence je zaručena větou o vázaném extrému.

Funkce $\Omega$ nabude svého minima, pokud bude platit

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{r}} = \mathbf{o} \tag{8}$$

a pokud matice

$$\left[\frac{\partial^2\Omega}{\partial r_i\partial r_j}\right] \tag{9}$$

$(i,\, j\in\{\,1,\,2\,\})$ bude positivně definitní.

### 2.2.1 Vlastní vyrovnání

Po roznásobení (7)

$$\Omega(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{r} - 2\mathbf{r}^T\mathbf{A}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{x}) + (\mathbf{r}^T\mathbf{r}-1)\,k$$

a derivaci funkce $\Omega$ vznikne rovnice pro $\mathbf{r}$, $k$:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{r}} = 2\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{r} - 2\mathbf{A}^T\mathbf{x} + 2\mathbf{r}k\ \ = \mathbf{o} \tag{10}$$

Vynásobením obou stran předchozí rovnice zleva vektorem $\frac{1}{2}\,.\,\mathbf{r}^T$ ji lze upravit pro vyjádření koreláty $k$ pomocí vektoru $\mathbf{r}$.

$$\mathbf{r}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{r} - \mathbf{r}^T\mathbf{A}^T\mathbf{x} + \mathbf{r}^T\mathbf{r}k\ \ = \mathbf{o}$$

Vzhledem k (5) lze pak snadno určit korelátu $k$

$$k\ \ = -\mathbf{r}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{r} - \mathbf{A}^T\mathbf{x})\ , \tag{11}$$

po jejímž dosazení do (10)

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{r}} &= \mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{r} - \mathbf{A}^T\mathbf{x} - \mathbf{r}\mathbf{r}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{r} - \mathbf{A}^T\mathbf{x}) = \\ &= (\mathbf{I}-\mathbf{r}\mathbf{r}^T)(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{r} - \mathbf{A}^T\mathbf{x}) = (\mathbf{I}-\mathbf{r}\,\mathbf{r}^T)(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{r} - \mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{h}) = \\ &= (\mathbf{I}-\mathbf{r}\mathbf{r}^T)\mathbf{A}^T\mathbf{A}(\mathbf{r}-\mathbf{h}) = (\mathbf{I}-\mathbf{r}\,\mathbf{r}^T)(\mathbf{r}-\mathbf{h})\,c\ .\end{aligned} \tag{12}$$

vznikne rovnice pro $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{o} = (\mathbf{I} - \mathbf{r}\,\mathbf{r}^T)(\mathbf{r} - \mathbf{h})\,c\;. \tag{13}$$

Matice $\mathbf{I}$ je jednotková matice řádu 2 a $c$ je reálná konstanta, která se vyskytuje na obou diagonálních pozicích matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$, jež je navíc díky redukci k těžišti diagonální. To znamená:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = c\,\mathbf{I}\;, \tag{14}$$

takže poslední úprava v (12) je oprávněná. Hodnotu konstanty $c$ lze jednoduše zjistit prostým vynásobením matic $\mathbf{A}^T$, $\mathbf{A}$ v (14), po němž vyjde

$$c = \mathbf{x}'^T\mathbf{x}'\;. \tag{15}$$

Hodnota konstanty $c$ je však zatím nepodstatná, v tuto chvíli je důležité jen to, že je nenulová a je možno jí dělit obě strany rovnice (13). Tato rovnice se po provedení naznačeného násobení dále zjednoduší na tvar:

$$\mathbf{o} = \mathbf{r} - \mathbf{r}\mathbf{r}^T\mathbf{r} - \mathbf{h} + \mathbf{r}\mathbf{r}^T\mathbf{h} = -\mathbf{h} + \mathbf{r}\mathbf{r}^T\mathbf{h} \quad \text{(díky (5))}$$

Platí tedy:

$$\mathbf{h} = \mathbf{r}\mathbf{r}^T\mathbf{h} \Rightarrow \mathbf{h}^T\mathbf{h} = \mathbf{h}^T\mathbf{r}\mathbf{r}^T\mathbf{h} = (\mathbf{h}^T\mathbf{r})\,(\mathbf{r}^T\mathbf{h}) = (\mathbf{h}^T\mathbf{r})^2\;.$$

$$\sqrt{(\mathbf{h}^T\mathbf{h})} = ||\mathbf{h}|| = \pm\mathbf{h}^T\mathbf{r}$$

Tedy

$$\frac{\mathbf{h}^T\mathbf{r}}{||\mathbf{h}||} = \pm 1\;.$$

To znamená, že skalární součin vektorů $\frac{\mathbf{h}}{||\mathbf{h}||}$, $\mathbf{r}$ je 1 nebo $-1$. Skalární součin libovolných dvou vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ je přímo úměrný kosinu úhlu mezi nimi, tj.:

$$\mathbf{a}^T\mathbf{b} = ||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||\cos(\alpha(\mathbf{a},\,\mathbf{b}))\;,$$

kde $\alpha(\mathbf{a},\,\mathbf{b})$ je úhel vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

Oba vektory $\frac{\mathbf{h}}{||\mathbf{h}||}$, $\mathbf{r}$ jsou jednotkové, takže jejich skalární součin je přímo roven kosinu úhlu jimi sevřeného, tj.:

$$\cos(\alpha(\mathbf{h},\,\mathbf{r})) = \frac{\mathbf{h}^T\mathbf{r}}{||\mathbf{h}||} = \pm 1\;.$$

Úhel $\alpha(\mathbf{h},\,\mathbf{r})$ vektorů $\frac{\mathbf{h}}{||\mathbf{h}||}$, $\mathbf{r}$ je tudíž nulový nebo přímý ($0^g$ nebo $200^g$). Hledaný vektor $\mathbf{r}$ má tedy s vektorem $\frac{\mathbf{h}}{||\mathbf{h}||}$ stejnou nebo opačnou orientaci. Mají však také stejnou velikost, takže platí

$$\mathbf{r} = \pm\frac{\mathbf{h}}{||\mathbf{h}||}\;. \tag{16}$$

### 2.2.2 Diskuze o typu extrému

Nyní je třeba rozhodnout, které z obou řešení odpovídá minimu funkce $\Omega$. K tomu je třeba určit matici druhých parciálních derivací (9). Opětným derivováním vektorové funkce (10) dostaneme matici:

$$\left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r_i \partial r_j}\right] = \mathbf{A}^T\mathbf{A} + \mathbf{I}k \quad .$$

Ta je positivně definitní tehdy, jestliže pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ platí:

$$\mathbf{u}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \mathbf{I}k\ )\mathbf{u} > 0$$

Vzhledem k (14) a k (11) lze tuto nerovnost dále upravit:

$$0 < \mathbf{u}^T(\mathbf{I}c + \mathbf{I}k\ )\mathbf{u} = (c+k)\mathbf{u}^T\mathbf{u} \Rightarrow$$

$$0 < c + k = c - \mathbf{r}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{r} - \mathbf{A}^T\mathbf{x}) = c - \mathbf{r}^T(\mathbf{I}c)\mathbf{r} + \mathbf{r}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{h} \; .$$

Poslední úpravu jsme si mohli dovolit díky rovnici (3). Opětovným využitím podmínky (5) a rovnosti (14) konečně dostaneme požadavek positivní definitnosti v jednoduchém tvaru:

$$c\,\mathbf{r}^T\mathbf{h} > 0 \; .$$

Nyní je třeba si připomenout, že konstanta $c$ je nejen nenulová, ale i kladná, což plyne z (15). Platí proto:

$$\mathbf{r}^T\mathbf{h} > 0 \; ,$$

což může být splněno jen při volbě kladného znaménka v (16). Tím je vektor $\mathbf{r}$ již jednoznačně určen.

# 3 Vyrovnané transformační koeficienty shodnostní transformace

## 3.1 Prvky matice rotace

Vzhledem k (16) a výsledku podkapitoly 2.2.2 jsou transformační koeficienty $\mathbf{r}$ shodnostní transformace vyrovnané za podmínky MNČ dány přesným vztahem:

$$\boxed{\mathbf{r} = \frac{\mathbf{h}}{||\mathbf{h}||}}$$

Vektor $\mathbf{h}$ obsahuje transformační koeficienty podobnostní transformace vypočtené podle (4).

## 3.2 Výpočet posunu

Pro původní, neredukované souřadnice $\hat{\mathbf{x}}_P$ , $\hat{\mathbf{x}}'_P$ libovolného podrobného bodu $P$ platí

$$\hat{\mathbf{x}}_P - \hat{\mathbf{x}}_T = \mathbf{R} \cdot (\hat{\mathbf{x}}'_P - \hat{\mathbf{x}}'_T) \ . \tag{17}$$

Tuto rovnost lze vyjádřit v obvyklejším tvaru

$$\hat{\mathbf{x}}_P = \mathbf{t} + \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{x}}'_P \ ,$$

kde $\mathbf{t}$ je posun počátků obou souřadnicových systémů

$$\boxed{\mathbf{t} = \hat{\mathbf{x}}_T - \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{x}}'_T}$$

Lubomír Soukup