Příklady z pravděpodobnosti a statistiky k testům a na zkoušení

Ivan Nagy, Pavla Pecherková, Jitka Homolová

Obsah

1 PRAVĚPODOBNOST

1.1 Popisná statistika

Číselné charakteristiky

1.1.1 Příklad

Určete první a druhé výběrové druhé momenty datových souborů

$$x = \{15;\ 12;\ 18;\ 14;\ 21;\ 15;\ 17;\ 14;\ 25;\ 13\},$$

$$y = \{9;\ 21;\ 15;\ 32;\ 11;\ 5;\ 17;\ 12;\ 22;\ 11\}.$$

[$\overline{x} = 16.4$, $\overline{y} = 15.5$, $s^2(x) = 16.04$, $s(xy) = 2.11$, $s^2(y) = 61.39$]

1.1.2 Příklad

Určete střední hodnotu, výběrovou směrodatnou odchylku a rozptyl, modus, medián a rozpětí datového souboru x

1; 1; 2; 2; 2; 3; 3; 1; 1; 1; 1; 1; 2; 1; 2; 3; 2; 2; 1; 2;
2; 2; 2; 3; 2; 2; 1; 1; 1; 2; 3; 1; 2; 1; 1; 2; 2; 1; 3; 1;
1; 2; 2; 2; 3; 2; 2; 3; 1; 1; 3; 1; 3; 2; 2; 1; 2; 3; 2; 3;
3; 3; 1; 3; 2; 2; 2; 2; 2; 1; 1; 2; 1; 1; 2; 2; 2; 3; 1; 1;
1; 3; 2; 1; 1; 1; 3; 2; 2; 2; 2; 3; 1; 2; 2; 2; 2; 1; 3; 2.

[$\overline{x} = 1.85$, $s = 0.73$, $s^2 = 0.533$,
modus $\hat{x} = 2$, median $\tilde{x} = 2$, rozpětí $R = 2$]

1.1.3 Příklad

Určete medián, dolní a horní kvartil, rozpětí, mezikvartilové rozpětí
a) $x = \{2;\ 15;\ 12;\ 25;\ 8;\ 19;\ 14;\ 6\}$, b) $x = \{6;\ 8;\ 1;\ 4;\ 6;\ 7;\ 4\}$.

[V pořadí ze zadání: a) 13; 7; 17; 23; 10; b) 6; 4; 7; 7; 3]

1.1.4 Příklad

Statistickým šetřením byla získána následující data (x_i jsou hodnoty, n_i četnosti)

$$x_i = \{5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}, \qquad n_i = \{19;\ 2;\ 4;\ 18;\ 7\}.$$

Určete počet dat n, střední hodnotu $\overline{x}$, modus $\hat{x}$, median $\tilde{x}$, dolní kvartil $\tilde{x}_{25}$, horní kvartil $\tilde{x}_{75}$, rozpětí R, mezikvartilové rozpětí IQR, výběrový rozptyl s^2 a výběrovou směrodatnou odchylku s.

[$n = 50$, $\overline{x} = 6.84$, $\hat{x} = 5$, $\tilde{x} = 7.5$, $\tilde{x}_{25} = 5$, $\tilde{x}_{75} = 8$,
$R = 4$, $IQR = 3$, $s^2 = 2.505$ a $s = 1.583$]

1.1.5 Příklad

Na procesu jsme naměřili data a setřídili do následující tabulky

x_i	1	3	4	7	8	9
n_i	21	15	18	39	12	10

Určete výběrový rozptyl a směrodatnou odchylku těchto dat.

[$s_x^2 = 7.314; s_x = 2.704$]

1.1.6 Příklad

Na procesu jsme naměřili data a setřídili do následující tabulky

x_i	12	15	24	37	44
n_i	14	33	28	16	12

Určete střední hodnotu, modus, medián a dolní kvartil.

[mx=23.83; mod=15; med=24; dol_kvartil=15]

1.1.7 Příklad

Na procesu jsme naměřili data

x_i	15	13	44	17	28	39	18	14	37
y_i	11	15	18	39	12	10	15	21	34

Určete výběrovou kovarianci těchto dat.

[cov=-1.5]

1.1.8 Příklad

Na procesu jsme naměřili data a setřídili do intervalů, reprezentovaných svými středy. Intervaly (I) a jejich četnosti (N) jsou v tabulce

I_i	$< 5 - 8)$	$< 8 - 15)$	$< 15 - 22)$	$< 22 - 35)$	$< 35 - 39)$
n_i	4	12	23	6	2

Určete výběrový rozptyl, směrodatnou odchylku a modální interval.

$[s^2(x) = 52.66;\ s\,(x) = 7.26;\ \text{mod} = (15 - 22)]$

Grafy

1.1.9 Příklad

Na zvoleném stanovišti v Praze byly měřeny rychlosti projíždějících vozidel. Data jsou v následující tabulce

87 94 112 73 66 60 92 43 59 59
74 83 61 87 82 43 77 46 67 63
89 50 99 64 76 107 61 101 76 96
49 67 83 70 77 90 71 88 71 60
47 40 93 97 69 70 57 105 70 64

a) Zobrazte data v časovém grafu.

b) Zkonstruujte histogram pro intervaly $\langle 40 - 60)$, $\langle 60 - 80)$, $\langle 80 - 100)$ a $\langle 100 - 120)$.

c) Nakreslete krabicový diagram.

1.1.10 Příklad

Na jedné křižovatce v Praze byl opakovaně měřen stupeň dopravy. Byla zjištěna následující data

$$3\ \ 1\ \ 2\ \ 4\ \ 4\ \ 2\ \ 4\ \ 4\ \ 4\ \ 3\ \ 4\ \ 2\ \ 2\ \ 4\ \ 3.$$

a) Zapište data v tříděném tvaru.

b) Zobrazte data ve sloupkovém grafu.

b) Nakreslete histogram a normovaný histogram.

1.1.11 Příklad

Pro náhodně vybraná auta byla měřena závislost spotřeby na počtu ujetých kilometrů. Byla získána následující data

vzdálenost [km]	125	64	228	511	35	78	65	184	96	58
spotřeba [l]	8.3	4.6	15.4	7.1	2.1	4.6	4.6	10.9	5.8	3.4

Nakreslete graf závislosti spotřeby na ujetých kilometrech.

1.2 Kombinatorika

1.2.1 Příklad

Určete, kolik dvojjazyčných slovníků je třeba vydat, aby byla zajištěna možnost vzájemného přímého překladu z ruského, anglického, německého a francouzského jazyka?

[6]

1.2.2 Příklad

V botníku je po jednom páru pohorek, tenisek, sandálů, hnědých a černých polobotek. Kolika způsoby z nich lze vybrat
a) nejdříve levou a pak pravou botu, které k sobě nepatří;
b) pár bot, které k sobě nepatří;
c) dvě boty, které k sobě nepatří?

[a) 20; b) 40; c) 80]

1.2.3 Příklad

V košíku je 12 jablek a 10 hrušek. Petr si má vybrat jablko nebo hrušku tak, aby Věra, která si po něm vybere jedno jablko a jednu hrušku, měla co největší možnost výběru.

[jablko]

1.2.4 Příklad

Kolika způsoby
a) lze ze 30 lidí zvolit předsedu, místopředsedu a pokladníka?
b) může shromáždění 30 lidí zvolit ze svého středu tříčlenný výbor?

[a) 24360; b) 4060]

1.2.5 Příklad

Na MS v hokeji hraje 8 družstev. Kolika způsoby jim lze udělit zlatou, stříbrnou a bronzovou medaili.

[336]

1.2.6 Příklad

Určete počet všech přirozených čísel menších než 500, v jejichž zápisu jsou pouze cifry 4, 5, 6, 7, a to každá nejvýše jednou.

[22]

1.2.7 Příklad

Kolik sudých trojciferných čísel lze vytvořit z číslic 0, 1, 2, 3 jestliže se číslice nesmí opakovat?

[11]

1.2.8 Příklad

Určete počet všech pěticiferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu je každá z číslic 0, 1, 3, 4, 7.

[96]

1.2.9 Příklad

Určete, kolika způsoby je na pětimístné lavici možno posadit pět dětí, z nichž dva chtějí sedět vedle sebe.

[48]

1.2.10 Příklad

Určete počet všech přirozených čísel
a) trojciferných, sestavených pouze z číslic 1, 3, 5, 7, 9
b) pěticiferných, sestavených pouze z číslic 1, 3, 5.

[a) 125; b) 243]

1.2.11 Příklad

Přístupový kód do trezoru je tvořen posloupností tří písmen a čtyř číslic. Kolik různých kódů je možno sestavit, máme-li k dispozici 28 písmen?

[219 520 000]

1.2.12 Příklad

Kolik značek Morseovy abecedy lze vytvořit pomocí nejvýše čtyřprvkových skupin teček a čárek?

[30]

1.2.13 Příklad

Kolik přímek je určeno deseti body, jestliže právě čtyři z nich leží na přímce?

[40]

1.2.14 Příklad

Určete kolika způsoby lze na šachovnici vybrat trojici polí tak, aby všechna pole nebyla téže barvy.

[31 744]

1.2.15 Příklad

Určete kolika způsoby lze na šachovnici vybrat trojici polí tak, aby všechna ležela v témže sloupci.

[448]

1.2.16 Příklad

Ze sedmi mužů a čtyř žen se má vybrat šestičlenná skupina, v níž jsou alespoň tři ženy. Kolika způsoby to lze provést?

[161]

1.2.17 Příklad

Ve společnosti šesti lidí si přiťukl každý s každým. Kolik cinknutí se ozvalo?

[15]

1.3 Pravděpodobnost

1.3.1 Příklad

Uvažujme pokus: hod dvěma kostkami (bílou a žlutou). Pomocí množiny vyjádřete jev „padne sudý součet když víme, padl součet větší než 8.

$[\{[6,4],[5,5],[4,6],[6,6]\}]$

1.3.2 Příklad

Uvažujme pokus: hod dvěma kostkami (bílou a žlutou). Pomocí množiny vyjádřete jev „padne sudý součet když víme, že na bílé kostce padlo číslo menší než 4“.

$[\{[1,1],[1,3],[1,5],[2,2],[2,4],[2,6],[3,1],[3,3],[3,5]\}]$

1.3.3 Příklad

Jsou dány tři neslučitelné jevy J_1, J_2 a J_3, jejichž sjednocení dá celý základní prostor Ω. Platí $P(J_1) = 2P(J_2) = 3P(J_3)$. Čemu se rovná $P\left(J_1' \cap J_2' \cap J_3'\right)$,

$[P = 0]$

1.3.4 Příklad

Jsou dány dva nezávislé jevy J_1 a J_2, pro něž platí: $P(J_1) = 0.4$ a $P(J_2) = 0.3$. Čemu se rovná
a) $P\left(J_1 \cap J_2'\right)$, b) $P(J_1 \cup J_2)$.

[0.28; 0.58]

1.3.5 Příklad

Základní prostor $\Omega = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$. Platí:

$$P(s_2) = 2P(s_1);\ P(s_3) = 3P(s_1);\ P(s_4) = 4P(s_1);$$
$$P(s_5) = 5P(s_1);\ P(s_6) = 6P(s_1).$$

Určete $P(\{s_1, s_3, s_4\})$.

[0.381]

1.3.6 Příklad

A a B jsou dva nezávislé jevy, $P(A) > 0$ a $A \subset B$. Určete $P(B)$.

[$P = 1$]

1.3.7 Příklad

Jaká je pravděpodobnost výhry 1. ceny ve sportce při jednom vsazení? (Je třeba uhodnout 6 čísel ze 49.)

[1/13 983 816]

1.3.8 Příklad

Jaká je pravděpodobnost, že při jednom hodu třemi kostkami bude součet bodů 5?

[6/216]

1.3.9 Příklad

Ve třídě je 25 dívek a 15 chlapců. Náhodně vybereme tři žáky. Jaká je pravděpodobnost, že to budou dva chlapci a jedna dívka?

[0,266]

1.3.10 Příklad

Ve třídě je 20 žáků. Mezi nimi jeden Oldřich a jedna Božena. Jména žáků napíšeme na lístky a vylosujeme dvě skupiny, ”větší” 8 žáků a ”menší” 5 žáků (7 žáků nebude vylosováno). Jaká je pravděpodobnost, že
a) Oldřich a Božena nebudou vylosováni?
b) Oldřich a Božena budou vylosováni do stejné skupiny?
c) Božena bude vylosována do jedné skupiny, zatímco Oldřich nebude vylosován?

[a) 0.11; b) 0.2; c) 0.239]

1.3.11 Příklad

V krabici je 6 bílých kuliček a 4 černé kuličky. Náhodně vylosujeme 2 kuličky. Jaká je pravděpodobnost, že:
a) Nebude vybrána ani jedna bílá kulička?
b) Bude vybrána jedna bílá a jedna černá kulička?
c) Obě kuličky budou bílé?

[a) 0.13; b) 0.53; c) 0.33]

1.3.12 Příklad

Čtverec je třemi vodorovnými a třemi svislými čarami rozdělen na šachovnici 4x4. Do každého řádku je na jedno z jeho čtyř polí umístěn hrací kámen. Určete pravděpodobnost, že v každém sloupci leží právě jeden kámen.

[3/32]

1.3.13 Příklad

Tři muži a tři ženy obsadí náhodně šest míst kolem stolu. Určete pravděpodobnost, že sedí kolem stolu střídavě.

[0.1]

1.3.14 Příklad

Číslice 1, 2, 3, 4, 5 jsou napsány na lístcích. Náhodně vybereme tři lístky a položíme je vedle sebe v tom pořadí, jak jsme je vybrali. Vypočítejte pravděpodobnost, že vzniklé trojciferné číslo bude sudé.

[2/5]

1.3.15 Příklad

Ze 32 hracích karet vybíráme dvakrát za sebou jednu kartu. Určete pravděpodobnost, že
a) obě karty jsou esa, jestliže jsme první kartu nevrátili;
b) obě karty jsou stejného typu (např. srdce), jestliže jsme první vytaženou kartu opět vrátili zpět.

[a) 0.012; b) 0.25]

1.3.16 Příklad

V dodávce 100 kusů křišťálových váz je 5 vadných. Při kontrole vybereme náhodně 4 kusy. Jaká je pravděpodobnost, že
a) jedna vybraná váza je vadná;
b) alespoň jedna z vybraných váz je vadná?

[a) 0.176; b) 0.188]

1.3.17 Příklad

Výrobky považujeme za vadné, když nemají předepsanou hmotnost nebo rozměr. Výrobků, které nemají správný rozměr, je 10%, těch, které mají špatnou váhu je 30% a výrobků bez vady je 65%. Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek nemá správnou hmotnost, ale má předepsaný rozměr.

[0.25]

1.3.18 Příklad

V antikvariátě se snižuje cena, jestliže má knížka vytrženou alespoň jednu stránku nebo je počmáraná. Knížek s vytrženou stránkou je 20%, počmáraných knížek je 30% a bezvadných je 70%. Určete jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná knížka je počmáraná, ale má všechny stránky.

[0.1]

1.3.19 Příklad

Rovina je rozdělena systémem rovnoběžek ve vzdálenostech 6 cm. Poté je na ni vhozen kruh o poloměru 1. Jaká je pravděpodobnost, že kruh neprotne žádnou rovnoběžku?

[2/3]

1.3.20 Příklad

Necht' pro dvě náhodně zvolená čísla x, y platí $0 < x \leq 1$, $0 < y \leq 1$. Jaká je pravděpodobnost, že jejich součet není větší než 1 a součin není menší než 0,09?

[0.2022]

1.3.21 Příklad

Tyč dlouhá d je náhodně rozlomená na 3 kusy. Určete, jaká je pravděpodobnost, že ze tří vzniklých částí lze sestrojit trojúhelník.

[1/4]

1.3.22 Příklad

Dvě osoby mají stejnou možnost přijít na domluvené místo v jakoukoli dobu mezi dvanáctou a třináctou hodino a jejich příchody jsou nezávislé. Ten, kdo přijde první, čeká na druhého dvacet minut a pak odejde. Určete, jaká je pravděpodobnost, že se setkají.

[5/9]

1.3.23 Příklad

Údaje o 100 narozených dětech jsou v tabulce:

	Váha do 3 kg	Váha nad 3 kg
Výška do 50 cm	60	20
Výška nad 50 cm	15	5

Náhodně vybereme jedno dítě. Označíme jako jev A vybrání dítěte s váhou do 3 kg, jako jev B vybrání dítěte s výškou do 50 cm. Rozhodněte, zda jevy A a B jsou závislé.

[jsou nezávislé]

1.3.24 Příklad

V klobouku je 10 lístků na kterých jsou napsána jména 6 chlapců a 4 dívek. Lístky zamícháme a postupně dva z nich vylosujeme. Jaká je pravděpodobnost, že na nich budou jména dvou chlapců, jestliže:
a) První lístek vrátíme a druhý losujeme opět ze všech lístků?
b) První lístek nevrátíme a druhý losujeme je z těch, co zůstaly?

[a) 0.36; b) 1/3]

1.3.25 Příklad

Výrobek je postupně obráběn na dvou strojích. Pravděpodobnost kvalitního zpracování výrobku na prvním stroji je 0,8 a na druhém stroji 0,9. Stroje pracují nezávisle na sobě. Jaká je pravděpodobnost zhotovení kvalitního výrobku, tj. výrobku který nebyl pokažen ani na jednom stroji?

[0.72]

1.3.26 Příklad

Přístroj je sestaven z 300 nezávisle pracujících součástek. Pravděpodobnost poruchy každé ze součástek za jednu směnu je 0,01. Jaká je pravděpodobnost, že v náhodně vybrané směně bude přístroj pracovat bez poruchy?

[0.049]

1.3.27 Příklad

Jevy A, B a C jsou vzájemně nezávislé a všechny mají pravděpodobnost 0,8. Vypočítejte pravděpodobnost, že při jednom hodu:
a) Nastanou všechny tři jevy současně.
b) Nenastane ani jeden z jevů.
c) Nastane pouze jev A.
d) Nastane právě jeden z těchto jevů.

[a) 0.512; b) 0.008; c)0.032; d) 0.096]

1.3.28 Příklad

Podíl žárovek ve skladu od určitého výrobce je 40%. Z těchto žárovek je 90% první jakosti. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná žárovka je od tohoto výrobce a je první jakosti?

[0.36]

1.3.29 Příklad

Házíme dvěma kostkami. Určete pravděpodobnost, že
a) padne součet větší než 6, jestliže na první kostce padla dvojka;
b) padne součet větší než 9, jestliže na první kostce padlo sudé číslo.

[a) 1/3; b) 2/9]

1.3.30 Příklad

V urně je 5 bílých a 7 černých kuliček. Vytáhneme za sebou dvě kuličky. Jaká je pravděpodobnost vytažení dvou bílých kuliček, jestliže se po prvním tahu kulička
a) nevrátí, b) vrátí.

[a) 0.15; b) 0.17]

1.3.31 Příklad

Z celkové produkce závodu je 4% zmetků. Z dobrých výrobků je 75% standardních. Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek je standardní.

[0.72]

1.3.32 Příklad

Závod vykazuje při výrobě 10% zmetkovost. Určete pravděpodobnost, že mezi 4 náhodně vybranými výrobky nebude ani jeden vadný.

[0.656]

1.3.33 Příklad

Dodávku 100 výrobků kontrolujeme náhodným výběrem. Celou dodávku považujeme za dobrou, jestliže v sérii pěti vybraných výrobků nebude žádný výrobek vadný. Jaká je pravděpodobnost, že dodávka nebude dobrá, jestliže v ní je 5% vadných výrobků?

[0.23]

1.3.34 Příklad

Tři sportovci hází nezávisle jeden na druhém oštěpem. První překoná hranici 80m průměrně v 80%, druhý v 70% a třetí v 50% hodů. Každý z nich jednou hodí. Jaká je pravděpodobnost, že bude překonaná hranice 80m?

[0.97]

1.3.35 Příklad

Je známo, že první skupina studentů vyřeší úlohu s pravděpodobností 2/5, druhá s pravděpodobností 1/3. Obě skupiny řeší úlohu nezávisle na sobě. S jakou pravděpodobností bude úloha vyřešena?

[0.6]

1.3.36 Příklad

Dva sportovci střílejí nezávisle na stejný cíl. Pravděpodobnost, že cíl zasáhne první, je 0,9 a druhý 0,8. Vypočtěte pravděpodobnost, že cíl nezasáhne ani jeden z nich.

[0.02]

1.3.37 Příklad

Přes kanál se přenáší binární signál. Pravděpodobnost změny 0 nebo 1 na opačný znak je 1%, nezávisle na předchozím znaku. Vyslali jsme signál 10110. Určete pravděpodobnost toho, že
a) se signál přenese správně;
b) se přenesla kombinace 11110.

[a) 0.951; b) 0.0096]

1.3.38 Příklad

Střelec třikrát nezávisle vystřelil na cíl. Pravděpodobnost zásahů je postupně 0,5; 0,6; 0,8. Určete pravděpodobnost toho, že
a) v cíli bude právě jeden zásah;
b) v cíli bude alespoň jeden zásah.

[a) 0.26 b) 0.96]

1.3.39 Příklad

Pravděpodobnost, že zákazník vejde do obchodu v průběhu jedné minuty je 0,01. Určete pravděpodobnost toho, že v průběhu 100 minut vejdou do obchodu tři zákazníci.

[0.061]

1.3.40 Příklad

Jaká je pravděpodobnost, že při pěti nezávislých hodech kostkou padne
a) šestka pouze při druhém a čtvrtém hodu;
b) šestka právě dvakrát.

[a) 0.016; b) 0.16]

1.3.41 Příklad

Pravděpodobnost, že dodávka bude mít více než 2% vadných výrobků, je 0,08. Určete pravděpodobnost, že ve dvaceti dodávkách budou tři, ve kterých bude více než 2% vadných výrobků.

[0.14]

1.3.42 Příklad

Při experimentu byl křížen bílý a fialový hrách. Podle zákonů dědičnosti by měly být 3/4 potomků fialové a 1/4 bílá. Vzklíčilo 10 rostlin. Určete pravděpodobnost, že
a) žádná rostlina nebude bílá;
b) alespoň tři rostliny budou fialové;
c) fialových bude alespoň 6 a nejvíce 8.

[a) 0.056; b) 0.999; c) 0.678]

1.3.43 Příklad

Pravděpodobnost, že ve čtyřech pokusech nastane alespoň jednou jev A je 0,59. Určete pravděpodobnost, že jev nastane v jednom pokuse, jestliže pokusy jsou nezávislé?

[0.254]

1.3.44 Příklad

V loterii je 1000 losů. Jeden z nich vyhrává 1. cenu, 5 losů 2. cenu a 20 losů 3. cenu. Jaká je pravděpodobnost, že zakoupený los vyhraje?

[0.026]

1.3.45 Příklad

Při náhodném pokusu může nastat jeden z jevů $A \cap \bar{B}$; $\bar{A} \cap B$; $A \cap B$; $\bar{A} \cap \bar{B}$. Všechny tyto jevy mají stejnou pravděpodobnost 0,25. Jaká je pravděpodobnost jevu A, jevu B a jevu $A \cup B$?

[$A = 0.5$; $B = 0.5$; $A \cup B = 0.75$]

1.3.46 Příklad

Přístroj je sestaven ze tří na sobě nezávisle pracujících částí. Ve sledovaném časovém intervalu je pravděpodobnost poruchy každé z jeho částí 0,1. Jaká je pravděpodobnost, že:
a) Ani jedna z částí nebude mít poruchu.
b) Všechny části budou mít poruchu.
c) Právě jedna část bude mít poruchu.
d) Alespoň jedna část bude mít poruchu.

[a) 0.729; b) 0.001; c) 0.243; d) 0.271]

1.3.47 Příklad

K osevu byly vybrány dvě odrůdy pšenice, a to 20% 1.odrůdy a 80% 2.odrůdy. Pravděpodobnost vyklíčení 1.odrůdy je 0,95 a 2.odrůdy 0,98. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybrané zrno vyklíčí?

[0.974]

1.3.48 Příklad

Ve třídě, kde poměr chlapců a dívek je 7:3, studuje s vyznamenáním pětina chlapců a desetina dívek. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný zástupce třídy bude studovat s vyznamenáním?

[0.266]

1.3.49 Příklad

Dva střelci střílejí nezávisle na cíl. Pravděpodobnost zásahu prvního je 0,7 a druhého 0,8. Jaká je pravděpodobnost, že při současném výstřelu zasáhne cíl alespoň jeden z nich?

[0.96]

1.3.50 Příklad

Skokan do dálky má tři nezávislé pokusy na to, aby se zlepšil. Přitom pravděpodobnost zlepšení je v každém pokusu stejná, rovna 1/3. Vypočtěte pravděpodobnost, že se skokan během tří pokusů zlepší.

[0.704]

1.3.51 Příklad

Systém se skládá ze tří zařízení jejichž pravděpodobnosti bezporuchového chodu jsou postupně 0,7; 0,8; 0,8. Určete pravděpodobnost bezporuchového chodu systému, jsou-li zařízení zapojena a) v sérii, b) paralelně.

[a) 0.448; b) 0.988]

1.3.52 Příklad

Mezi 100 výrobky je 5 vadných. Náhodně vybereme 5 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že ve výběru bude alespoň jeden vadný výrobek?

[0.83]

1.3.53 Příklad

Z dvanácti součástek jsou 2/3 bezvadných a 1/3 vadných. Vypočtěte pravděpodobnost, že při současném vytažení tří součástek bude mezi nimi alespoň jedna vadná.

[0.746]

1.3.54 Příklad

V urně je jeden bílý a čtyři černé míčky. Dvě osoby vytahují střídavě a bez vracení vždy po jednom míčku. Vyhrává ten, kdo první vytáhne bílý míček. Vypočtěte pravděpodobnost, že to bude ten, kdo začíná.

[3/5]

1.3.55 Příklad

V urně jsou tři bílé, pět černých a dva červené míčky. Dvě osoby vytahují střídavě a bez vracení vždy po jednom míčku. Vyhrává ten, kdo první vytáhne bílý míček a při tahu červeného míčku končí hra nerozhodně. Vypočtěte pravděpodobnost, že vyhraje ten, kdo začíná.

[0.395]

1.3.56 Příklad

Dva hráči házejí postupně mincí. Vyhrává ten, komu padne jako první líc. Určete pravděpodobnost výhry každého z hráčů.

[2/3]

1.3.57 Příklad

Test obsahuje 10 otázek a na každou z nich jsou 4 možné odpovědi (z nichž jen jedna je správná). Student se neučil a otázky zatrhává zcela náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že zatrhne alespoň 5 otázek správně?

[0.078]

1.3.58 Příklad

Je známo, že určitý lék úspěšně léčí dané onemocnění v 90% případů. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň čtyři z pěti pacientů budou tímto lékem vyléčeni?

[0.918]

1.3.59 Příklad

Automat vyrobí za minutu 10 součástek. Pravděpodobnost vyrobení vadné součástky je 0,01. Po kolika minutách bude pravděpodobnost, že byl vyroben alespoň jeden zmetek, rovna minimálně 0,8?

[16]

1.3.60 Příklad

Pravděpodobnost, že spotřeba elektrické energie ve všední den určitého ročního období přesáhne stanovenou normu, je 0,3. Jaká je pravděpodobnost, že v pěti náhodně vybraných všedních dnech nebude norma ani jednou překročena?

[0.168]

1.3.61 Příklad

Na skladě je 100 výrobků. Z nich 20 má mechanické poškození a 5 je nefunkčních. Výrobků, co jsou bez vady je 76. Náhodně vybereme jeden výrobek. Určete pravděpodobnost, že výrobek má obě vady jestliže víme, že není bez vady.

[1/24]

1.3.62 Příklad

Firma má 248 zaměstnanců. Z nich 98 pracuje ve fimě na vedleší pracovní poměr a 34 jich má jen částečný úvazek. Zaměstnanců, kteří mají vedlejší pracovní poměr na částečný úvazek je 15. Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný zaměstnanec pracuje na částečný úvazek jestliže víme, že je v hlavním pracovním poměru?

[0.127]

1.3.63 Příklad

Dva hráči střídavě losují po jednom korálku z pěti bílých, osmi modrých a čtyř oranžových. Losované korálky nevracejí. Jaká je pravděpodobnost, že v prvních třech tazích hry budou vytaženy bílé korálky?

[0.0147]

1.3.64 Příklad

Dva hráči střídavě losují po jednom korálku z pěti bílých, osmi modrých a čtyř oranžových. Losované korálky nevracejí. Jaká je pravděpodobnost, že v prvních třech tazích budou postupně taženy barvy bílý, modrý a oranžový?

[0.0392]

1.3.65 Příklad

V krabici je 10 bílých a 8 černých korálků. Hodíme kostkou a jestliže padlo sudé číslo, přidáme do krabice bílý korálek, jestliže padlo liché číslo, přidáme černý korálek. Potom náhodně vytáhneme jeden korálek. Jaká je pravděpodobnost, že bude bílý?

[0.5526]

1.3.66 Příklad

Tři závody vyrábí elektrické žárovky. První vyrábí 45%, druhý 40% a třetí 15% z celkové produkce. Z produkce prvého závodu je 70% výrobků standardních, z druhého 80% a ze třetího 81%. Určete pravděpodobnost zakoupení standardní žárovky.

[0.762]

1.3.67 Příklad

Na skladě jsou součástky ze tří továren. První továrna ná průměrně 0,3%, druhá 0,2% a třetí 0,4% zmetků. První továrna dodadala 1000, druhá 2000 a třetí 2500 součástek. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná součástka bude zmetek?

[0.0031]

1.3.68 Příklad

V dílně pracuje 20 dělníků, kteří vyrábějí stejné součástky. Každý z nich vyrobí za směnu stejné množství. Deset z nich vyrobí 94% výrobků 1.třídy, šest 90% a čtyři 85%. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek bude 1.třídy.

[0.91]

1.3.69 Příklad

Při sportovní střelbě volí střelec náhodně jednu ze čtyř pušek. Pravděpodobnosti zásahu jednotlivých pušek jsou 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Jaká je pravděpodobnost zásahu při jednom výstřelu.

[0.75]

1.3.70 Příklad

Na skladě je 70% přístrojů první jakosti a 30% druhé jakosti. Pravděpodobnost, že přístroj 1. jakosti pracuje bez poruchy je 0,95 a přístroj 2. jakosti 0,7. Organizace koupila jeden přístroj a ten pracoval bez poruchy. Určete, jaká je pravděpodobnost, že přístroj byl 1. jakosti.

p[0.76]

[0.98]

1.3.71 Příklad

V určité společnosti je 45% mužů a 55% žen. Vysokých nad 180 cm je 5% mužů a 1% žen. Náhodně vybraná osoba měří nad 180 cm. Jaká je pravděpodobnost, že vybraná osoba je žena?

[0.141]

1.3.72 Příklad

Při vyšetřování pacienta je podezření na tři navzájem se vylučující onemocnění. Pravděpodobnost výskytu první choroby je 0,3; druhé 0,5 a třetí 0,2. Laboratorní zkouška je pozitivní u 15% nemocných s první nemocí, 30% nemocných s druhou a 30% nemocných s třetí nemocí. Jaká je pravděpodobnost druhé nemoci, je-li po laboratorním vyšetření výsledek pozitivní?

[0.588]

1.3.73 Příklad

V dílně pracuje 10 dělníků, kteří za směnu vyrobí stejný počet výrobků. Pět z nich vyrobí 96% standardních výrobků, tři 90% a dva 85%. Náhodně vybereme jeden výrobek a ten je standardní. Jaká je pravděpodobnost, že ho vyrobila první skupina dělníků?

[0.522]

1.3.74 Příklad

Na dovolenou vyrazila skupina 10 kamarádů a mezi nimi Tonda. Dva z kamarádů jsou nadšení šplháním po horách a je pravděpodobnost 0.9 že hned první den vyrazí na tůru. Dalších pět se rádo opaluje, a tak je pro ně pravděpodobnost tůry jen 0.7. Zbytek říká, že se nemá nic uspěchat, že asi půjdou do města na nákup, a tedy pravděpodobnost tůry je jen 0.2 . Nakonec Tonda na tůru šel. Jaká je pravděpodobnost, že patřil do první skupiny kamarádů?

[0.305]

1.3.75 Příklad

Na dovolenou vyrazila skupina 10 kamarádů a mezi nimi Tonda. Dva z kamarádů jsou nadšení šplháním po horách a je pravděpodobnost 0.9 že hned první den vyrazí na tůru. Dalších pět se rádo opaluje, a tak je pro ně pravděpodobnost tůry jen 0.7. Zbytek říká, že se nemá nic uspěchat, že asi půjdou do města na nákup, a tedy pravděpodobnost tůry je jen 0.2 . Jaká je pravděpodobnost, že Tonda půjde první den na tůru?

[0.59]

1.3.76 Příklad

Pravděpodobnost, že bude vyroben vadný izolátor, je 0.05. S jakou pravděpodobností budou mezi 80 vyrobenými izolátory 4 vadné?

[0.20]

1.3.77 Příklad

Ze zkušenosti víme, že při normálním chodu stroje je v průměru 0.1% výrobků vadných. Ke stroji nastoupil nový pracovník a z 5 000 výrobků, které zhotovil, bylo 11 vadných. Spadá tento počet do běžného stavu, nebo je vyšší, např. vzhledem k nezkušenosti nového pracovníka?

[Počet vadných výrobků je vyšší.]

1.4 Náhodná veličina

1.4.1 Příklad

V osudí je pět lístků označených čísly 1,2,3,4,5. Najednou vytáhneme tři lístky. Náhodná veličina X udává součet vytažených čísel. Najděte rozdělení této náhodné veličiny.

[hodnoty: 6,7,8,9,10,11,12; pravděpodobnosti: 0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.1, 0.1]

1.4.2 Příklad

Ze společnosti 10 osob, které tvoří 7 mužů a 3 ženy, vybereme náhodně 3 osoby. Náhodná veličina X udává počet žen ve výběru. Najděte rozdělení této náhodné veličiny.

[veličina=počet žen: P(0)=0.292, P(1)=0.525, P(2)=0.175, P(3)=0.008]

1.4.3 Příklad

Automobil postupně projíždí křižovatkami se semafory tak dlouho, dokud ho některý ze semaforů nezastaví. Každý ze semaforů automobil s pravděpodobností $1/3$ zastaví a s pravděpodobností $2/3$ nechá projet. Náhodná veličina X udává počet křižovatek, kterými automobil projede, než bude zastaven. Najděte její rozdělení.

[P(0)=0.333, P(1)=0.222,P(2)=0.148, P(3)=0.099 P(4)=0.066, ...]

1.4.4 Příklad

Házíme třema kostkami. Náhodná veličina je dána počtem šestek, které při hodu padly. Najděte rozdělení této náhodné veličiny.

[P(0)=0.5787, P(1)=0.3472, P(2)=0.0694, P(3)=0.0046]

1.4.5 Příklad

Třikrát vystřelíme na cíl. Pravděpodobnost zásahu při každém výstřelu je $p = 0,7$. Určete rozdělení pravděpodobnosti počtu zásahů, jestliže výstřely jsou nezávislé.

[P(0)=0.0270, P(1)=0.1890, P(2)=0.4410, P(3)=0.3430]

1.4.6 Příklad

Napište hustotu náhodné veličiny X, řídící se rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti na intervalu $\langle -1; 2\rangle$.

[f(x) = 1/3]

1.4.7 Příklad

Náhodná veličina X má rozdělení pravděpodobnosti s hustotou

$$f(x) = c\frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

Určete konstantu c.

[$c = \pi^{-1}$]

1.4.8 Příklad

Náhodná veličina je dána distribuční funkcí $F(x)$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \;\; x \le 0, \\ x^2 & \text{pro} \;\; 0 < x \le 1, \\ 1 & \text{pro} \;\; x > 1\,. \end{cases}$$

Určete a) hustotu pravděpodobnosti $f(x)$,   b) pravděpodobnost $P(0,25 < X < 0,75)$.

[$f = 2x$ pro $x \in (0,1)$; $P = 0.5$]

1.4.9 Příklad

Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X je dána předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \;\; x \le 1, \\ x - \frac{1}{2} & \text{pro} \;\; 1 < x \le 2, \\ 0 & \text{pro} \;\; x > 2\,. \end{cases}$$

Určete distribuční funkci $F(x)$.

[$F(x) = 0.5(x^2 - x)$ pro $x \in \langle 1; 2\rangle$, vlevo nula, vpravo jedna]

1.4.10 Příklad

Distribuční funkce náhodné veličiny X je dána předpisem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \;\; x \le 0, \\ a + b\sin x & \text{pro} \;\; 0 < x \le \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{pro} \;\; x > \frac{\pi}{2}\,. \end{cases}$$

Určete a) konstanty a, b;   b) hustotu pravděpodobnosti $f(x)$;
c) pravděpodobnost $P(0 < X < \frac{\pi}{4})$.

[a) $a = 0$, b=1, b) $f(x) = \cos x$ pro $x = \big(0, \frac{\pi}{2}\big\rangle$, c) $P = \frac{\sqrt{2}}{2}$]

1.4.11 Příklad

Najděte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny, jejíž rozdělení je dáno tabulkou

x_i	0	1	2
$P(x_i)$	1/2	1/4	1/4

[$\frac{3}{4}$; $\frac{11}{16}$]

1.4.12 Příklad

Najděte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X, jejíž hustota je

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } \; 0 < x \leq 1, \\ 2 - x & \text{pro } \; 1 < x \leq 2, \\ 0 & \text{jinde} \, . \end{cases}$$

[$E\,[X] = 1$, $\mathrm{D}[X] = \frac{1}{6}$]

1.4.13 Příklad

Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X s hustotou pravděpodobnosti

$$f\,(x) = \begin{cases} 4x & x \in (0, 0.5) \\ 4 - 4x & x \in (0.5, 1) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

[$\frac{1}{2}$; $\frac{7}{24}$]

1.4.14 Příklad

Určete střední hodnotu náhodné veličiny s hustotou pravděpodobnosti

$$f\,(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x & x \in (0, 2) \\ 1 - \frac{1}{4}x & x \in (2, 4) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

[2]

1.4.15 Příklad

Určete střední hodnotu náhodné veličiny X s hustotou pravděpodobnosti

$$f\,(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x & x \in (0, 4) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

[$\frac{4}{3}$]

1.4.16 Příklad

Je dána hustota pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} k|\sin(x)| & \text{pro } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Určete konstantu k.

$[\frac{1}{2}]$

1.4.17 Příklad

Je dána hustota pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro } x \in (0,1), \\ \frac{3}{4} - \frac{1}{4}x & \text{pro } x \in (1,3), \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Určete: $P(X < 2)$.

$[\frac{7}{8}]$

1.4.18 Příklad

Nakreslete hustotu pravděpodobnosti pro binomické rozdělení s $n = 3$ a $\pi = 0.2$. Hodnoty vyznačte v grafu číselně.

$[f(x) = \ 0.512, \quad 0.384, \quad 0.096, \quad 0.008]$

1.4.19 Příklad

Náhodná veličina X má binomické rozdělení s $n = 10$ a $\pi = 0.3$ Určete pravděpodobnost $P(X > 2)$.

[0.617]

1.4.20 Příklad

Nakreslete první 4 členy hustoty pravděpodobnosti Poissonova rozdělení s $\lambda = 7$. Hodnoty vyznačte v grafu a popište číselně.

[0.0009, 0.0064, 0.022, 0.052]

1.4.21 Příklad

Náhodná veličina X má geometrické rozdělení s parametrem $\lambda = 0.3$. Určete pravděpodobnost $P(X > 2)$.

[0.343]

1.4.22 Příklad

Nakreslete první čtyři členy hustoty pravděpodobnosti geometrického rozdělení s $\pi = 0.8$. Hodnoty vyznačte v grafu číselně.

[0.80, 0.16, 0.032, 0.0064]

1.4.23 Příklad

Nakreslete hustotu pravděpodobnosti rovnoměrného rozdělení na intervalu $(0, 2)$. Určete pravděpodobnost $P(X > 0.5)$.

[$\frac{3}{4}$]

1.4.24 Příklad

Náhodná veličina X má alternativní rozdělení s $\pi = 0.3$ Určete pravděpodobnost, že v pěti jeho nezávislých realizacích budou tři jedničky.

[0.13]

1.4.25 Příklad

Nakreslete distribuční funkci exponenciálního rozdělení se střední hodnotou 3. Určete pravděpodobnost $P(X > 0.5)$.

[0.85]

1.4.26 Příklad

Z množiny čísel $\{1, 2, \cdots, 20\}$ vybíráme náhodně jedno číslo. Náhodnou veličinu X definujeme jako zbytek po vydělení vybraného čísla sedmičkou. Určete $f(x)$.

[$f(x) = \{\frac{2}{20}; \frac{3}{20}; \frac{3}{20}; \frac{3}{20}; \frac{3}{20}; \frac{3}{20}; \frac{3}{20}\}$]

1.4.27 Příklad

Nakreslete hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny X s normálním rozdělením se střední hodnotou 5 a rozptylem 1. Určete pravděpodobnost $P(X < 3.355)$, jestliže známe kritickou hodnotu standardního normálního rozdělení $z_{0.05} = 1.645$.

[0.05]

1.4.28 Příklad

Určete konstantu k, jestliže
$f(x) = k(x-2)$, pro $x = 3, 4, 5, 6$;

[$\frac{1}{10}$]

1.4.29 Příklad

Určete medián náhodné veličiny X, jestliže její hustota pravděpodobnosti je

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x) & \text{pro } x \in (0,1), \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

[$c = 2$; $med = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.29$]

1.4.30 Příklad

Určete a- procentní kvantil a kritickou hodnotu rozdělení χ^2 s ν stupni volnosti.

a) $a = 5$; $\nu = 10$,
b) $a = 25$; $\nu = 5$,
c) $a = 50$; $\nu = 15$.

[; ;]

1.4.31 Příklad

Určete a- procentní kvantil a kritickou hodnotu studentova rozdělení s ν stupni volnosti.

a) $a = 5$; $\nu = 10$,
b) $a = 25$; $\nu = 5$,
c) $a = 50$; $\nu = 15$.

[; ;]

1.4.32 Příklad

Určete pravděpodobnost $P(X > a)$ pro standardní normální rozdělení a Studovo rozdělení s ν stupni volnosti.

a) $a = 5$; $\nu = 10$,
b) $a = 25$; $\nu = 5$,
c) $a = 50$; $\nu = 15$.

[; ;]

1.5 Limitní věty

1.5.1 Příklad

Pravděpodobnost výskytu jevu v jednom pokusu je 0.3. S jakou pravděpodobností lze tvrdit, že relativní četnost výskytu tohoto jevu je ve 100 pokusech v mezích 0.2 až 0.4?

[0.97]

1.5.2 Příklad

Pravděpodobnost, že se za dobu T porouchá přístroj, je 0.2. S jakou pravděpodobností se za dobu T ze 100 přístrojů porouchá
a) alespoň 20,
b) méně než 28,
c) 14 až 26 přístrojů?

[a) 0.5; b) 0.977; c) 0.866]

1.5.3 Příklad

Při jednom pokusu získáme kladný výsledek s pravděpodobností 0.05. Kolik je třeba provést pokusů, abychom s pravděpodobností 0.8 získali alespoň 5 kladných výsledků?

[144]

2 STATISTIKA

2.1 Náhodný výběr

2.1.1 Příklad

Určete hodnotu a, pro níž platí

$$P(Z \le a) = 0.01,$$

víte-li, že $Z \propto N(0,1)$ a $z_{0,01} = 2,326$ je kritická hodnota rozdělení.

[-2.326]

2.1.2 Příklad

Určete hodnotu a, pro níž platí

$$P(Z \le a) = 0.99,$$

víte-li, že $Z \propto N(0,1)$ a $z_{0,01} = 2.326$ je kritická hodnota rozdělení.

[2.326]

2.1.3 Příklad

Určete hodnotu a, pro níž platí

$$P(Z > a) = 0.99,$$

víte-li, že $Z \propto N(0,1)$ a $z_{0,01} = 2.326$ je kritická hodnota rozdělení.

[-2.326]

2.1.4 Příklad

Určete hodnotu a, pro níž platí

$$P(X \le a) = 0.01,$$

víte-li, že $X \propto N(\mu, \sigma^2)$, $\mu = 1$, $\sigma^2 = 16$ a $z_{0,01} = 2.326$ je kritická hodnota rozdělení $N(0,1)$.

[-8.304]

2.1.5 Příklad

Určete hodnotu a, pro níž platí

$$P(X \le a) = 0.99,$$

víte-li, že $X \propto N(\mu, \sigma^2)$, $\mu = 1$, $\sigma^2 = 16$ a $z_{0,01} = 2.326$ je kritická hodnota rozdělení $N(0,1)$.

[10.304]

2.1.6 Příklad

Určete hodnotu a, pro níž platí

$$P(X > a) = 0.99,$$

víte-li, že $X \propto N(\mu, \sigma^2)$, $\mu = 1$, $\sigma^2 = 16$ a $z_{0,01} = 2.326$ je kritická hodnota rozdělení $N(0, 1)$.

[-8.304]

2.1.7 Příklad

Po silnici se pohybuje kolona 20 vojenských vozidel, která mají vlivem nestejného nákladu, nahuštění pneumatik atd. nestejnou výšku. Ta má normální rozdělení N(μ, σ^2), kde $\mu = 2.93$ a $\sigma^2 = 0.002$. Výšky automobilů jsou navzájem nezávislé. V cestě stojí most vysoký 3m. Jaká je pravděpodobnost, že
a) první vozidlo neprojede,
b) náhodně vybrané vozidlo neprojede,
c) všichni projedou.

[a) 0.058; b) 0.058; c) 0.296]

2.1.8 Příklad

Předpokládáme, že pasažéři letecké společnosti Flyways Airline mají průměrnou váhu 75kg se směrodatnou odchylkou 12.5kg. Letadlo má nosnost 3900kg a kapacitu 50 pasažérů. S jakou pravděpodobností bude letadlo při plném obsazení přetíženo?

[0.045]

2.1.9 Příklad

Hmotnost "kilového" balení má u dobře seřízeného plnícího stroje váhu 1012,5g se směrodatnou odchylkou 7,5g. Kontrola náhodně vybírá několik balení z každé série a zjišťuje, zda jejich průměrná hmotnost je minimálně 1kg. Pokud ne, firma platí pokutu 1500Kč. Jaká je pravděpodobnost pokuty, je-li rozsah výběru
a) $n = 1$ b) $n = 4$ c) $n = 16$.

[a) $P = 0.048$; b) $P = 4.10^{-4}$; c) $P \doteq 0$]

2.1.10 Příklad

V roce 1975 měli muži v Americe příjem normálně rozdělený se střední hodnotou \$10 000 a směrodatnou odchylkou \$8 000.
a) Náhodně vybereme jednoho muže. Jaká je pravděpodobnost, že se jeho plat bude od střední hodnoty lišit o více než \$5 000?
b) Provedeme výběr o velikosti $n = 100$ mužů. Jaká je pravděpodobnost, že se jejich průměrný plat bude od střední hodnoty lišit o více než \$5 000?

[a) $P = 0.532$; b) $P == \doteq 0$]

2.2 Bodové a intervalové odhady

2.2.1 Příklad

Je dán výběr $\mathbf{X} = [X_1, ..., X_n]$ z rozdělení s hustotou

$$f(x) = \frac{1}{\theta} \mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}x}, \; x > 0\,,$$

s prvním a druhým obecným momentem $\mu_1 = \theta$ a $\mu_2' = 2\theta^2$.

Ukažte, že statistika $T = \overline{X}$ je nestranným a konzistentním odhadem parametru θ.

[je nestranný i konzistentní odhad]

2.2.2 Příklad

Je dán výběr $\mathbf{X} = [X_1, ..., X_n]$ z rozdělení s hustotou

$$f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, \; x > 0\,,$$

s prvním a druhým obecným momentem $\mu_1 = \frac{1}{\lambda}$ a $\mu_2' = \frac{2}{\lambda^2}$.

Ukažte, že statistika $T = \overline{X}$ je nestranným a konzistentním odhadem parametrické funkce $\frac{1}{\lambda}$.

[je nestranný i konzistentní odhad]

2.2.3 Příklad

Je dán výběr $\mathbf{X} = [X_1, ..., X_n]$ z rozdělení s hustotou

$$f(x) = \pi(1-\pi)^x, \; x = 0; 1; ... \; ; \; \pi \in (0; 1)\,,$$

s prvním a druhým obecným momentem $\mu_1 = \dfrac{1-\pi}{\pi}$ a $\mu_2' = \dfrac{\pi^2 - 3\pi + 2}{\pi^2}$.

Ukažte, že statistika $T = \overline{X}$ je nestranným a konzistentním odhadem parametrické funkce $\dfrac{1-\pi}{\pi}$.

[je nestranný i konzistentní odhad]

2.2.4 Příklad

Je dán výběr $\mathbf{X} = [X_1, ..., X_n]$ z rozdělení s hustotou

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.\frac{1}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},\ x \in (0; \infty)\,,$$

s prvním a druhým obecným momentem $\mu_1 = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ a $\mu_2' = \sigma^2$.

Ukažte, že statistika $T = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\bar{X}$ je nestranným a konzistentním odhadem parametru σ.

[je nestranný i konzistentní odhad]

2.2.5 Příklad

Je dán výběr $\mathbf{X} = [X_1, ..., X_n]$ z rozdělení s hustotou

$$f(x) = \pi^x(1-\pi)^{1-x},\ x \in \{0;\ 1\}\,,$$

s prvním a druhým obecným momentem $\mu_1 = \pi$ a $\mu_2' = \pi$.

a) Ukažte, že statistika $T = p = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ je nestranným a konzistentním odhadem parametru π.

b) Ověřte, zda statistika $T = n_1 = \sum_{i=1}^n X_i$ je nestranným a konzistentním odhadem parametrické funkce $n\pi$.

[a) ano oba; b) nestr. ano, konz. ne]

2.2.6 Příklad

Statistickým průzkumem byl vytvořen výběr 2000 dat $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_{2000})$. Utvoříme 3 statistiky pro odhad střední hodnoty μ:
T_1 : průměr ze všech sudých dat z výběru.
T_2 : průměr ze všech lichých dat z výběru.
T_3 : průměr z první poloviny dat z výběru.
Porovnejte vydatnosti jednotlivých statistik.

[jsou stejné]

2.2.7 Příklad

Pro odhad parametru θ byly vytvořeny tři nestranné a nezávislé statistiky:
$T_1,\ T_2,\ T_3$, pro něž platí: $D[T_1] : D[T_2] : D[T_3] = 2 : 1 : 3$
a) Zjistěte, zda statistiky

$$S_1 = 2T_1 - T_2 \quad \text{a} \quad S_2 = T_1 + T_2$$

jsou nestranné odhady parametru θ.
b) Která ze statistik

$$S_3 = \frac{T_1 + T_3}{2} \quad \text{a} \quad S_4 = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{3}$$

je vydatnější?

[a) S_1 je, S_2 není nestranná; b) S_4 je vydatnější]

2.2.8 Příklad

Metodou maximální věrohodnosti i momentovou metodou odhadněte parametr δ exponenciálního rozdělení $Ex(A, \delta)$ s hustotou

$$f(x) = \frac{1}{\delta} \mathrm{e}^{-\frac{x-A}{\delta}},$$

kde je $E[X] = \delta + A$, $D[X] = \delta^2$

[$\hat{\delta} = \bar{x} - A$]

2.2.9 Příklad

Metodou maximální věrohodnosti i momentovou metodou odhadněte parametr π geometrického rozdělení $Ge(\pi)$ s hustotou

$$f(x) = \pi(1-\pi)^x,$$

kde je $E[X] = \frac{1-\pi}{\pi}$, $D[X] = \frac{1-\pi}{\pi^2}$

[$\hat{\pi} = \frac{1}{\bar{x}+1}$]

2.2.10 Příklad

Metodou maximální věrohodnosti i momentovou metodou odhadněte parametr π negativního binomického rozdělení $NegBi(\pi)$ s hustotou

$$f(x) = \binom{x+n-1}{n-1} \pi^n (1-\pi)^x,$$

kde je $E[X] = n\frac{1-\pi}{\pi}$, $D[X] = n\frac{1-\pi}{\pi^2}$

[$\hat{\pi} = \frac{n}{\bar{x}+n}$]

2.2.11 Příklad

Metodou maximální věrohodnosti odhadněte parametr ω rozdělení s hustotou

$$f(x) = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{\omega x^2}{2}}$$

pro $x > 0,\ \omega > 0$ (tady $\pi = 3.14$)

$[\hat{\omega} = \frac{1}{x^2}]$

2.2.12 Příklad

V určitém obchodě byla sledována doba čekání zákazníka na obsluhu a shromážděna následující data

X_i	hodnota	5	15	25	35	45	55	65
n_i	četnost	365	245	150	100	70	45	25

Předpokládáme, že doba čekání má exponenciální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\delta} \mathrm{e}^{-\frac{x}{\delta}},\ x > 0.$$

Metodou maximální věrohodnosti odhadněte parametr δ (střední doba čekání).

[20]

2.2.13 Příklad

Na sérii televizorů se prováděly zkoušky. Na každém televizoru byl zaznamenáván počet poruch za dobu 100 hodin. Předpokládáme, že sledovaný znak (počet poruch / 100 hod.) má Poissonovo rozdělení

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!}.$$

Výsledky měření jsou v tabulce

X_i	hodnota	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	četnost	199	169	87	31	9	3	1	1

Metodou maximální věrohodnosti odhadněte parametr λ (střední počet poruch za 100 hod. provozu).

[1]

2.2.14 Příklad

Při kontrole výrobků se šesti stejnými součástkami byl zjišťován počet vadných součástek. Výsledky kontroly jsou v tabulce

X_i	hodnota	0	1	2	3	4	5	6
n_i	četnost	170	356	290	130	33	15	6

Metodou momentů odhadněte parametr π binomického rozdělení náhodné veličiny X - počet vadných součástek výrobku.
Pravděpodobnostní funkce binomického rozdělení je

$$f(x) = \binom{n}{x} \pi^x (1-\pi)^{n-x}.$$

[0.26]

2.2.15 Příklad

Po 10 dnů jsme zaznamenávali počet přetržených nití při šití na stroji. Získali jsme následující údaje

x_i	počet	20	17	21	19	18	17	18	21	20	18

Předpokládáme rovnoměrné rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{2h}, \text{ pro } x \in \{\mu - h; \mu + h\}.$$

Metodou momentů určete parametry μ a h.

[2.5]

2.2.16 Příklad

Na 200 vzorcích jsme zjišťovali koncentraci chemické látky v %. Předpokládáme, že koncentrace má rozdělení $N(\mu; \sigma^2)$. Výsledky pokusu jsou v tabulce

X_i	hodnota	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,2	2,3
n_i	četnost	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

Metodou momentů odhadněte parametry μ a σ^2.

[0.247]

2.2.17 Příklad

Předpokládáme, že obsah síry v sebraných vzorcích rudy má rozdělení $N(\mu;\sigma^2)$. Výsledky měření jsou v tabulce

X_i	hodnota	32,4	32,8	33,2	33,6	34,0	34,4	34,8
n_i	četnost	3	7	12	6	6	1	1

Metodou momentů odhadněte parametry μ a σ^2.

[0.31]

2.2.18 Příklad

Předpokládejme, že výška chlapců ve věku 9.5 až 10 roků má normální rozdělení $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ s neznámou střední hodnotou a rozptylem rovným 39.112. Změřili jsme výšku 15 chlapců a vypočítali průměr 139.13. Určete:
a) 99% dvojstranný IS pro skutečnou výšku chlapců,
b) 95 % interval spolehlivosti pro dolní odhad výšky chlapců.

[a)$\mu \in (135.0,\ 143.3)$; b) $\mu \in (136.5, \infty)$]

2.2.19 Příklad

Přesnost metody analýzy na obsah vápníku je $\sigma = 0.12$. Provedli jsme 6 experimentů a zjistili průměrnou hodnotu 32.56% vápníku. Určete 95% IS pro odhad dolní hranice obsahu vápníku za předpokladu normality.

[$\mu \in (32.5,\ \infty)$]

2.2.20 Příklad

Měřili jsme průměr klikové hřídele na 250 součástkách. Předpokládáme, že naměřené veličiny mají rozdělení $N\left(\mu,\sigma^2\right)$. Z výsledků měření jsme vypočetli průměrnou hodnotu 995.6 a rozptyl s^2=134.7. Určete 95% oboustranný IS pro neznámou střední hodnotu.

[$\mu \in (994.2,\ 997.1)$]

2.2.21 Příklad

Sledovali jsme spotřebu oleje pro nátěrové hmoty. Předpokládáme, že tato spotřeba má rozdělení $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ s neznámými parametry. Na dvanácti vzorcích jsme spotřebu změřili a vypočetli průměr 14.306 a variabilitu s^2=0.327. Určete 95% IS pro střední hodnotu spotřeby oleje.

[$\mu \in (13.9,\ 14.7)$]

2.2.22 Příklad

Pro 25 výrobků jsme zjišťovali spotřebu materiálu. Ze zjištěných hodnot jsme vypočetli průměr 150 a proměnlivost s^2=15.84. Za předpokladu normality rozdělení sestrojte oboustranný interval, ve kterém bude ležet skutečná spotřeba materiálu s pravděpodobností 0.95.

[$\mu \in (148.4,\ 151.6)$]

2.2.23 Příklad

Pro zjišťování přesnosti metody pro stanovení obsahu manganu v oceli byla provedena 4 nezávislá měření vzorků. Chceme stanovit hranici, pro níž platí, že rozptyl větší než tato hranice se bude objevovat jen v 5% pokusů. Výsledky měření jsou: 0.31; 0.30; 0.29; 0.32.

[hranice je 0.0014]

2.2.24 Příklad

Na 100 strojích jsme změřili průměr hřídele. Velikost průměru hřídele má rozdělení $N\left(\mu, \sigma^2\right)$.
Z naměřených hodnot jsme vypočítali jejich variabilitu s^2=134.7. Určete:
a) interval $\langle d; h \rangle$, ve kterém bude ležet neznámý rozptyl s pravděpodobností 0.99;
b) hranici m, pro kterou platí $P(\sigma^2 \geq m) = 0.95$.

[a) $\sigma^2 \in (96.0,\ 200.5)$; b) hranice je 108.2]

2.2.25 Příklad

Ověřovali jsme koncentraci chemické látky v roztoku. Předpokládáme, že má normální rozdělení s neznámými parametry. Provedli jsme 5 analýz s výsledky: 17, 12, 15, 16, 11 %. Určete číslo h takové, že hodnoty rozptylů větší než h budou mít pravděpodobnost jen 0.05.

[h=37.7]

2.2.26 Příklad

V jakém intervalu lze s pravděpodobností 0.99 očekávat podíl nekvalitních výrobků, jestliže v náhodném výběru o rozsahu 1000 ks. bylo zjištěno 15 nekvalitních výrobků?

[$\pi \in (0.005,\ 0.025)$]

2.2.27 Příklad

Pro určitou územní oblast byl učiněn telefonický průzkum, zjišťující kolik domácností je vybaveno osobním počítačem. Celkem bylo dotázáno 100 domácností a zjištěno, že 60 domácností z dotázaných počítač vlastní. Určete 95% interval spolehlivosti pro podíl domácností vybavených PC.

[$\pi \in (0.5,\ 0.7)$]

2.2.28 Příklad

Za předpokladu, že výška dětí ve věku 10 let má normální rozdělení s rozptylem $\sigma^2 = 38$, určete 99% oboustranný IS, ve kterém bude ležet neznámá střední hodnota výšky dětí, jestliže z výběru 12 dětí byl vypočtena průměrná výška $\bar{x} = 127.3$. Určete IS
a) oboustranný;
b) pravostranný.

[a)$\mu \in (122.7,\ 131.9)$; b)$\mu \in (-\infty,\ 131.4)$]

2.2.29 Příklad

Za předpokladu, že výška dětí ve věku 10 let má normální rozdělení určete IS, ve kterém bude ležet neznámá střední hodnota výšky dětí, jestliže z výběru 12 dětí byl vypočtena průměrná výška $\bar{x} = 127.3$ a rozptyl $s^2 = 38$. Určete IS:
a) oboustranný;
b) levostranný.

[a) $\mu \in (121.8,\ 132.8)$; b)$\mu \in (122.5, \infty)$]

2.2.30 Příklad

Za předpokladu, že výška dětí ve věku 10 let má normální rozdělení určete 99% levostranný IS, ve kterém bude ležet neznámá střední hodnota výšky dětí, jestliže z výběru 12 dětí byl vypočtena průměrná výška $\bar{x} = 127.3$ a rozptyl $s^2 = 38$.

[]

2.2.31 Příklad

Na magistrále v úseku s doporučenou rychlostí 80 km/h jsme kontrolovali rychlost vozidel. Získali jsme následující údaje

rychlost (km/h)	72	73	65	136	72	73	66	73	73	72

Předpokládáme, že rozdělení rychlostí jedoucích vozidel je možno považovat za normální s rozptylem 100 $\left(\mathrm{km\,h^{-1}}\right)^2$. Určete
a) bodový a 95% intervalový (oboustranný) odhad rychlosti automobilů;
b) interval rychlostí, kterými jezdí 5% nejrychlejších řidičů.

[a) $\hat{\mu} = 77.5$; $\mu \in (71.3,\ 83.7)$; b) $\mu \in (82.7,\ \infty)$]

2.2.32 Příklad

Na magistrále v úseku s doporučenou rychlostí 80 km/h jsme kontrolovali rychlost vozidel. Získali jsme následující údaje

rychlost (km/h)	72	73	65	136	72	73	66	73	73	72

Předpokládáme, že rozdělení rychlostí jedoucích vozidel je možno považovat za normální. Určete
a) bodový a 95% intervalový (oboustranný) odhad rychlosti automobilů;
b) interval rychlostí, kterými jezdí 5% nejrychlejších řidičů.

[a) $\hat{\mu} = 77.5$; $\mu \in (62.6,\ 92.4)$; b) $\mu \in (89.5,\ \infty)$]

2.2.33 Příklad

Na magistrále v úseku s doporučenou rychlostí 80 km/h jsme kontrolovali rychlost vozidel. Získali jsme následující údaje

rychlost (km/h)	121	85	65	98	55	112	115	92	73	52

Předpokládáme, že rozdělení rychlostí jedoucích vozidel je možno považovat za normální. Pomocí intervalu spolehlivosti zjistěte, je-li pravděpodobnost jízdy rychlostí větší než 100 km/h nebo menší než 70 km/h větší než 5% jestliže
a) skutečný rozptyl rychlostí jízdy neznáme;
b) skutečný rozptyl rychlostí jízdy je z dlouhodobých měření znám a rovná se 200 $(\mathrm{km/h})^2$.
Intervaly spolehlivosti napište.

[a) je větší: $\mu \in (68.9,\ 104.7)$; b) je menší: $\mu \in (78,\ 95.6)$]

2.2.34 Příklad

Na magistrále v úseku s doporučenou rychlostí 80 km/h jsme kontrolovali rychlost vozidel ve směru do Prahy a z Prahy. Získali jsme následující údaje (v km/h)

do Prahy	72	73	65	136	72	73	66	73	73	72		
z Prahy	76	76	75	78	82	78	77	78	81	77	78	77

Předpokládáme, že rozdělení rychlostí jedoucích vozidel je možno považovat za normální.
a) Určete výběrové rozptyly rychlostí v obou směrech.
b) Určete 95% oboustranný interval spolehlivosti pro rozdíl rychlostí. Skutečné rozptyly rychlostí neznáme a o jejich vzájemném vztahu rozhodujeme na základě výběru.

[a) $s_1^2 = 431.39,\ s_2^2 = 4.02$; b) $\mu_1 - \mu_2 \in (-15.4,\ 14.9)$]

2.2.35 Příklad

Na magistrále v úseku s doporučenou rychlostí 80 km/h jsme kontrolovali rychlost vozidel. Získali jsme následující údaje

rychlost (km/h)	78	76	65	72	83	82	85	76	42	82
	69	72	75	81	76	76	79	76	77	76
	75	76	76	78	76	77	76	76	86	76

Předpokládáme, že rozdělení rychlostí jedoucích vozidel je možno považovat za normální. Na hladině 0,95 určete
a) maximální podíl řidičů, překračujících doporučenou rychlost,
b) skutečný podíl řidičů, kteří se od doporučené rychlosti odchýlí více než o 2 km/h?

[a) $P_{max} = 0.32$; b) $p \in (0.66,\ 0.94)$]

2.2.36 Příklad

Ve skladu je 1200 výrobků od firmy A a 800 výrobků od firmy B. Z výrobků na skladě bylo testováno 250 výrobků a zjištěno, že vadných výrobků od firmy A bylo 34 a od firmy B 27 výrobků. Určete 90% interval spolehlivosti pro rozdíl podílů vadných výrobků obou firem.

[$\pi \in (0,\ 0.0077)$]

2.2.37 Příklad

Předpokládejme, že výška chlapců ve věku 9,5 - 10 let má normální rozdělení $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$s neznámou střední hodnotou a rozptylem rovným 39.112. Změřili jsme výšku 15 chlapců a vypočítali průměr $\overline{x} = 139.13$. Určete

a) 99% oboustranný IS pro skutečnou výšku chlapců.
b) 95% IS spolehlivosti pro dolní odhad výšky chlapců.

[$\mu \in (135.0,\ 143.3)$; $\mu \in (136.5,\ \infty)$]

2.2.38 Příklad

Přesnost metody analýzy na obsah vápníků je $\sigma = 0.12$. Provedli jsme 6 experimentů a zjistili průměrnou hodnotu $\overline{x} = 32.56$ % vápníků. Určete 95% IS pro odhad dolní hranice obsahu vápníků za předpokladu normality.

$[\mu \in (32.5,\ \infty)]$

2.2.39 Příklad

Sledovali jsme spotřebu oleje pro nátěrové hmoty. Předpokládáme, že tato spotřeba má rozdělení $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ s neznámými parametry. Na dvanácti vzorcích jsme spotřebu změřili a vypočetli průměr $\overline{x} = 14.306$ a variabilitu $s^2 = 0.327$. Určete 95% IS pro střední hodnotu spotřebu oleje.

$[\mu \in (13.9,\ 14.7)]$

2.2.40 Příklad

Pro 25 výrobků jsme zjišťovali spotřebu materiálu. Ze zjištěných hodnot jsme vypočetli průměr 150 a proměnlivost $s^2 = 15.84$. Za předpokladu normality rozdělení sestrojte oboustranný interval, ve kterém bude ležet skutečná spotřeba materiálu s pravděpodobností 0.95.

$[\mu \in (148.4,\ 151.6)]$

2.2.41 Příklad

Na 100 trojích jsme změřili průměr hřídele. Velikost průměru hřídele má rozdělení $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$. Z naměřených hodnot jsme vypočítali jejich variabilitu $s^2 = 134.7$. Určete

a) IS ve kterém bude ležet neznámý rozptyl s pravděpodobností 0.99.
b) hranici m, pro kterou platí $P\left(\sigma^2 \geq m\right) = 0.95$.

$[\sigma^2 \in (95.9,\ 200.5);\ \sigma^2 \in (108.2,\ \infty)]$

2.2.42 Příklad

Ověřovali jsme koncentraci chemické látky v roztoku. Předpokládáme, že má normální rozdělení $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ s neznámými parametry. Provedli jsme 5 analýz s výsledky 17, 12, 15, 16 a 11 %. Určete číslo hranici h tak, že hodnoty rozptylů větších než hranice h budou mít pravděpodobnost jen 0.05.

[hranice je 37.7]

2.2.43 Příklad

Na každém ze dvou vzorků výfukových plynů jsme provedli analýzu obsahu olova. Na základě provedených analýz jsme získali hodnoty x a y. Najděte 99% oboustraný IS pro shodu těchto testů.

x	36.82	36.97	36.55	36.87
y	36.45	36.62	36.41	36.56

[$\mu_1 - \mu_2 \in (-0.008,\ 0.6)$]

2.2.44 Příklad

Pro určitou územní oblast byl učiněn telefonický průzkum zjišťující kolik domácností je vybaveno osobním počítačem. Celkem bylo dotázáno 100 domácností a zjištěno, že 60 domácností z dotázaných počítač vlastní. Určete 99% IS pro podíl domácností vybavených PC.

[$\pi \in (0.5,\ 0.8)$]

2.2.45 Příklad

Na jedné jednosměrné křižovatce bylo provedeno měření poměru odbočení. V náhodné hodině bylo provedeno měření, kdy počet aut odbočujích vlevo byl $L = 125$ a vpravo $P = 76$. Určete 99% IS pro podíl obočení vlevo.

[$\pi \in (0.5,\ 0.7)$]

2.2.46 Příklad

Na jedné jednosměrné křižovatce bylo provedeno měření poměru odbočení. V ranní hodině bylo provedeno měření, kdy počet aut odbočujích vlevo byl $L_{rno} = 125$ a vpravo $P_{rno} = 76$. V odpolední hodině byl tento poměr vlevo $L_{odpo} = 98$ a v pravo $P_{odbo} = 90$. Určete 95% IS pro rozdíl podílů odbočení vlevo v obou měřeních.

[$\pi_1 - \pi_2 \in (0.003,\ 0.2)$]

2.3 Parametrické testy hypotéz

2.3.1 Příklad

Standardním způsobem byl vyroben 1 000 000 obrazovek se střední životností 1 200 h a směrodatnou odchylkou 300 h. Poté byla zavedena nová technologie a vyzkoušeno 100 obrazovek. Jejich průměrná životnost byla 1265 h.
a) Na hladině 0,05 testujte hypotézu, která tvrdí "nic se nezměnilo" proti alternativě, říkající "nová technologie je lepší" (tj. obrazovky mají delší životnost).
b) Určete p-hodnotu pro novou technologii.

[a) "nic se nezměnilo" zamítáme; b) p_v=0.015]

2.3.2 Příklad

Firma, vyrábějící kuličky do ložisek tvrdí, že kuličky mají průměr 12.5 mm s maximálním rozptylem 0.05 mm^2. Naměřili jsme následující data

$$12.8 \quad 13.6 \quad 11.8 \quad 12.4 \quad 12.6 \quad 12.7$$

Na hladině významnosti 0.05 testujte tvrzení firmy.
(Odděleně proveďte dva testy a) pro průměrné hodnoty, b) pro rozptýlenost.)

[a) tvrzení firmy nezamítáme ($p_v = 0.55$); b) tvrzení firmy zamítáme $\left(p_v = 2 \cdot 10^{-6}\right)$]

2.3.3 Příklad

Ze souboru ocelových nosníků stejné nominální délky 6.5 m jsme náhodně vybrali 6 ks. Výrobce se zaručuje, že rozptyl délek nosníků je menší než 0.1 m. Naměřili jsme následující data

$$6.2 \quad 7.5 \quad 6.9 \quad 8.9 \quad 6.4 \quad 7.1$$

Na hladině významnosti 0.1 testujte tvrzení výrobce. (Odděleně proveďte dva testy a) pro průměrné hodnoty, b) pro rozptýlenost.)

[a) tvrzení výrobce nezamítáme ($p_v = 0.15$); b) tvrzení výrobce zamítáme $\left(p_v = 5 \cdot 10^{-6}\right)$]

2.3.4 Příklad

Ze souboru ocelových nosníků stejné nominální délky jsme provedli náhodný výběr 50 nosníků a vypočetli průměr $\overline{x} = 5.77$m a směrodatnou odchylku $s = 0.8$. Na 95% hladině významnosti testujte tvrzení výrobce, že
a) nominální délka nosníků je 6 m,
b) nominální délka nosníků není větší než 6 m.

[a) nezamítáme tvrzení výrobce ($p_v = 0.55$); b) nezamítáme tvrzení výrobce ($p_v = 0.74$)]

2.3.5 Příklad

Výrobce odhaduje u svého výrobku dobu životnosti na minimálně 1 000 h. Z předchozích měření víme, že rozptyl doby životnosti výrobků je 200 h^2. Vybrali jsme 25 výrobků a testovali je. Jejich průměrná doba životnosti byla 995 h. Je možno říci, že výrobky nesplňují záruky výrobce? Testujte na hladině a) 0.05; b) 0.01.

[($p_v = 0,039$)a) zamítáme tvrzení výrobce; b) nezamítáme tvrzení výrobce]

2.3.6 Příklad

Ze souboru odporů stejné nominální hodnoty jsme náhodně vybrali 16 ks, změřily a vypočetli průměr 9.3 kΩ. Oboustranným testem na hladině významnosti 0.05 testujte hypotézu, že soubor odporů má nominální hodnotu 10 $k\Omega$, je-li
a) $\sigma^2 = 4k\Omega^2$
b) σ neznáme, $s^2 = 6,25k\Omega^2$.

["má nominální hodnotu 10": a) nezamítáme ($p_v = 0.16$); b) nezamítáme ($p_v = 0.28$)]

2.3.7 Příklad

Pro kontrolu správnosti přístroje bylo provedeno 10 nezávislých měření:

15.23 15.21 15.19 15.16 15.26 15.22 15.23 15.26 15.23 15.29.

Lze považovat odchylky od správné hodnoty $\mu_0 = 15.2$ za náhodné, nebo je důvod k podezření na přítomnost systematické chyby? Testujte na hladině 0.05.

[systematická chyba je přítomna (kladná) ($p_v = 0.04$)]

2.3.8 Příklad

Nová metoda měření délky součástek byla ověřována na etalonu. Disperze, určená z 10 měření byla 100 μm^2. Je tento výsledek ve shodě s tvrzením, že disperze nové metody není větší než 50 μm^2? Volte $\alpha = 0.05$.

[tvrzení "není větší" zamítáme ($p_v = 0.03$)]

2.3.9 Příklad

Přesnost nastavení automatického obráběcího stroje se zjistí z rozptylu délky vyráběných součástek. Je-li jeho hodnota větší než 380 μm^2, je třeba stroj znovu nastavit. Vybrali jsme 15 součástek a jejich výběrový rozptyl byl 680 μm^2. Testujte tvrzení "stroj je dostatečně přesný" proti tvrzení "stroj je třeba znovu nastavit", a to na hladině významnosti a) 0.01; b) 0.05.

[($p_v = 0.03$): a) není třeba nastavit; b) je třeba nastavit]

2.3.10 Příklad

Přesnost nastavení automatického obráběcího stroje se zjistí z rozptylu délky vyráběných součástek. Je-li jeho hodnota větší než 28 μm^2, je třeba stroj znovu nastavit. Provedli jsme výběr a zjistili hodnoty průměrů ($\overline{x}$) a jejich četnosti (n).

n	5	12	32	11	8	3
$\overline{x}$	95	100	105	110	115	120

Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ testujte, zda je třeba stroj znovu nastavit.

[stroj není třeba nastavit ($p_v = 0.07$)]

2.3.11 Příklad

Při měření koeficientu tepelné vodivosti stejného izolačního materiálu jsme naměřili tyto hodnoty

$$0.62 \quad 0.64 \quad 0.57 \quad 0.61 \quad 0.59 \quad 0.57 \quad 0.62 \quad 0.59.$$

Výrobce materiálu zaručuje relativní stálost tepelné vodivosti materiálu s maximálním rozptylem 0.003. Testujte tvrzení výrobce na hladině 0.05.

[tvrzení výrobce je správné ($p_v = 0.98$)]

2.3.12 Příklad

Pro bavlněnou přízi je předepsána horní mez variability pevnosti, jinak vznikají potíže při tkaní. Požaduje se, aby směrodatná odchylka nepřekročila hodnotu 0.6. Rozdělení hodnot pevnosti příze je přibližně normální. Při ověření byly naměřeny hodnoty

$$2.22, 3.54, 2.37, 1.66, 4.74, 4.82, 3.21, 5.44, 3.23, 4.79, 4.85, 4.05, 3.48, 3.89, 4.90, 5.37$$

Je důvod k podezření na větší variabilitu pevnosti při hladině významnosti 0.05?

[důvod k podezření je $\left(p_v = 10^{-6}\right)$]

2.3.13 Příklad

Metodami A a B je ověřována pevnost látek. Stejný materiál byl pokusně podroben pěti zkouškám metodou A a šesti zkouškám metodou B. Byla získána data

metoda A	20.1	19.6	20.0	19.9	20.1	
metoda B	20.9	20.1	20.6	20.5	20.7	20.5

Na hladině významnosti 0.05 ověřte shodnost obou metod. (Metody považujeme za shodné, vykazují-li pro stejné materiály v průměru stejné hodnoty. Variabilitu předpokládáme shodnou.)

[zamítáme hypotézu o shodnosti ($p_v = 0.002$)]

2.3.14 Příklad

Na dvou soustruzích se vyrábějí stejné součástky, u nichž se kontroluje vnitřní průměr. Z prvního soustruhu bylo náhodně vybráno 16 a z druhého 25 součástek a byly vypočteny průměry z naměřených hodnot: první 37,5 a druhý 36,8. Na hladině významnosti 0,05 ověřte hypotézu o tom, že jednotlivé soustruhy produkují součástky se stejným vnitřním průměrem, jestliže σ_1, σ_2 neznáme a výběrové rozptyly jsou $s_1^2 = 1.21$ a $s_2^2 = 1.44$?

["stejný vnitřní průměr" se nezamítá ($p_v = 0.06$)]

2.3.15 Příklad

Je třeba porovnat dva technologické postupy A a B. Proto je 7 výrobků zhotoveno technologií A a 6 technologií B. Po proměření stejné charakteristiky na všech výrobcích máme porovnat kvalitu obou technologií (která je dána průměrnou hodnotou měřené charakteristiky). Testujte shodu obou technologií na hladině 0,1 a za předpokladu různých rozptylů výsledků obou postupů. Naměřené údaje jsou:

A	62	54	55	60	53	58	57
B	52	52	49	50	51	52	

[nejsou stejné ($p_v = 0.003$)]

2.3.16 Příklad

Osm vzorků chemické látky jsme postupně analyzovali titrační metodou a polarograficky. Výsledky jsou v tabulce

Vzorek	1	2	3	4	5	6	7	8
Polarografická metoda	18.6	27.6	27.5	25.0	24.5	26.8	29.7	26.5
Titrační metoda	18.58	27.37	27.27	24.64	24.10	26.33	29.33	26.63

Zjistěte, zda při hladině významnosti 0.05 dávají obě metody v průměru podobné výsledky.

[dávají podobné výsledky ($p_v = 0.46$)]

2.3.17 Příklad

Máme rozhodnout, zda se automobilu sjíždějí pneumatiky při seřízené geometrii na obou stranách stejně. bylo vybráno 5 vozů a po ujetí stejného počtu kilometrů bylo zjištěno následující sjetí (v mm)

Automobil	1	2	3	4	5
Pravá pneumatika	1.8	1.0	2.2	0.9	1.5
Levá pneumatika	1.5	1.1	2.0	1.1	1.4

Na hladině 0,05 testujte shodnost sjetí pneumatik na obou stranách vozu.

["shodnost sjetí pneumatik" se nezamítá ($p_v = 0.55$)]

2.3.18 Příklad

V jazykové škole, která se specializuje na výuku dvou jazyků (francouzštinu F a angličtinu A) byl vypsán srovnávací test z těchto jazyků (první polovina testu byla F, druhá A). Ihned po napsání bylo náhodně vybráno a opraveno 6 testů. Bodové výsledky testu jsou v tabulce

Test	1	2	3	4	5	6
F	65	12	82	38	70	56
A	81	5	69	95	71	92

Jsou tato data v rozporu s tvrzením, že výsledky školy jsou lepší v angličtině? Testujte na hladině $\alpha = 0.05$.

[tvrzení "lepší angličtina" se nezamítá ($p_v = 0.88$)]

2.3.19 Příklad

Ve výběru z výrobků o rozsahu 100 bylo nalezeno 12 vadných. Je tato skutečnost v souladu s tvrzením, že v produkci je nejvýše 5% vadných výrobků? Testujte na hladině významnosti 0.05.

["nejvýše 5% vadných" se zamítá $\left(p_v = 6 \cdot 10^{-4}\right)$]

2.3.20 Příklad

Dotazem 60 studentů bylo zjištěno, že v napsání testu z nich neuspělo 38. Je toto zjištění v rozporu s předpokladem, že úspěšnost testu bude minimálně 50%? Testujte jednostranným testem na hladině významnosti 0,05.

["úspěšnost minimálně 50% se zamítá ($p_v = 0.02$)]

2.3.21 Příklad

Dlouhodobým sledováním výrobního procesu je zjištěno, že při ustálených výrobních podmínkách vzniká přibližně 2% vadných výrobků. Za účelem kontroly, zda se podmínky nezhoršily, se odebírají vzorky po 100 výrobcích. Na základě počtu vadných výrobků ve vzorku se odhaduje skutečný aktuální stav (procento zmetků). Pokud toto procento překročí hodnotu 2,5%, je třeba stroj znovu nastavit. Na hladině 0,05 testujte "dobrý stav stroje" (tj. stroj není třeba nastavovat), jestliže ve výběru bylo 5 zmetků?

[stroj není třeba nastavit ($p_v = 0.06$)]

2.3.22 Příklad

Na magistrále v úseku s doporučenou rychlostí 80 km/h jsme kontrolovali rychlost vozidel ve směru do Prahy a z Prahy. V každém směru jsme zaznamenali 250 hodnot. Z nich ve směru do Prahy překročilo doporučenou rychlost 43 a z Prahy 58 vozidel.
a) Určete 95% oboustranný interval spolehlivosti pro rozdíl podílů řidičů překračujících doporučenou rychlost ve směru do Prahy a z Prahy.
b) Na základě výsledku a) odhadněte a zdůvodněte, zda je možno tvrdit, že s pravděpodobností 0,95 překračují řidiči doporučenou rychlost v obou směrech stejně. Ověřte testem hypotézy (uveďte p-hodnotu).

[a) $\mu_1 - \mu_2 \in (-0.13,\ 0.01)$; b) ano stejně (0 je v IS), test pro $\alpha = 0.05$, pval= 0.095]

2.3.23 Příklad

Na magistrále v úseku s doporučenou rychlostí 80 km/h jsme kontrolovali rychlost vozidel. Získali jsme následující údaje

rychlost (km/h)	78	76	65	72	83	82	85	76	42	82
	69	72	75	81	76	76	79	76	77	76
	75	76	76	78	76	77	76	76	86	76

Předpokládáme, že rozdělení rychlostí jedoucích vozidel je možno považovat za normální. Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu (uveďte p-hodnotu), že
a) skutečný podíl řidičů, kteří překročí doporučenou rychlost je menší než 0.15;

b) skutečný podíl řidičů, kteří nedodrží doporučenou rychlost o více než 2 km h^{-1}je větší než 0,6,
c) skutečný podíl řidičů, kteří jedou rychlostí nelišící se od doporučené o více než 3 km h^{-1} je právě 25 %.

[a) "je menší" se nezamítá ($p_v = 0.22$), b) "je větší" se zamítá $\left(p_v = 10^{-8}\right)$, c) neliší se od doporučené se nezamítá ($p_v = 0.52$)]

2.3.24 Příklad

Na magistrále v úseku s doporučenou rychlostí 80 km h^{-1} jsme kontrolovali rychlost vozidel směrem do a z Prahy. Výběrem jsme získali rychlosti D (do Prahy) a Z (z Prahy).

D	72	73	65	36	72	73	66	73	73	72		
Z	76	76	75	78	82	78	77	78	81	77	78	77

Na hladině významnosti $\alpha = 0.01$ testujte tvrzení, že do Prahy jezdí auta rychleji.

[tvrzení zamítáme($p_v = 0.01$)]

2.3.25 Příklad

Na magistrále v úseku s doporučenou rychlostí 80 km h^{-1} jsme kontrolovali rychlost vozidel směrem do a z Prahy. Výběrem jsme získali rychlosti do Prahy $\overline{x}_D$ a z Prahy $\overline{x}_Z$. Rychlosti r jsme roztřídili a zaznamenali jako četnosti n_D resp. n_Z (D je do Prahy a Z je z Prahy).

r	65	70	75	80	85	90	95	100	110
n_D	5	11	17	65	98	73	79	63	3
n_Z	8	22	13	71	48	64	89	24	5

Na hladině významnosti $\alpha = 0.01$testujte tvrzení, že

a) z Prahy jezdí auta rychleji,
b) z Prahy i do Prahy jezdí auta stejně rychle.

[tvrzení zamítáme$\left(p_v = 10^{-16}\right)$, tvrzení zamítáme$\left(p_v = 2 \cdot 10^{-16}\right)$]

2.3.26 Příklad

Na magistrále v úseku s doporučenou rychlostí 80 km h^{-1} jsme kontrolovali rychlost vozidel směrem do a z Prahy. Měřením rychlosti do Prahy jsme získali 255 hodnot a a Prahy 138 hodnot. Průměrná hodnota vypočtená z naměřených hodnot byla do Prahy $\overline{x}_D = 81$ a z Prahy $\overline{x}_Z = 85$ a rozptyl těchto hodnot byl $\sigma_D^2 = 438$ resp. $\sigma_Z^2 = 371$. Na hladině významnosti $\alpha = 0.01$ testujte tvrzení, že

a) do Prahy jezdí auta rychleji,
b) do Prahy i z Prahy jezdí auta stejně rychle.

[tvrzení zamítáme($p_v = 0.03$), tvrzení nezamítáme($p_v = 0.06$)]

2.3.27 Příklad

Na křižovatce jsme opakovaně zaznamenávali počty vozidel jedoucích přímo a odbočujících vlevo nebo vpravo. Zjistili jsme následující údaje

č.měření	1	2	3	4	5
přímo	22	19	30	26	24
vlevo	5	8	2	9	8
vpravo	12	9	7	14	11

Testujte tvrzení, že
a) podíl vozidel odbočujících vlevo (vztažený ke všem vozidlům, která křižovatkou projela) je na hladině 0.01 stejný jako těch, kteří odbočují vpravo;
b) podíl vozidel odbočujících vlevo (vztažený k vozidlům, která odbočují) je na hladině 0.01 stejný jako těch, kteří odbočují vpravo.

[a) nelze rozhodnout ($p_v = 0.01$), b) tvrzení se zamítá ($p_v = 0.001$)]

2.3.28 Příklad

Na křižovatce jsme opakovaně zaznamenávali počty vozidel jedoucích přímo a odbočujících vlevo nebo vpravo. Zjistili jsme, že přímo jelo 46 vozidel, vpravo 62 a vlevo 39. Na hladině významnosti $\alpha = 0.1$ testujte tvrzení, že

a) podíl vozidel jedoucích přímo je stejný jako těch, které odbočují (vztaženo ke všem vozidlům),
b) podíly automobilů odbočujících doleva a doprava, vztažené ke všem vozidlům, která křižovatkou projela, jsou stejné.

[a) tvrzení se zamítá $\left(p_v = 10^{-10}\right)$, b) tvrzení se nezamítá ($p_v = 0.13$)]

2.3.29 Příklad

Na křižovatce jsme opakovaně zaznamenávali počty automobilů jedoucích přímo a odbočujících vlevo nebo vpravo. Zjistili jsme následující údaje

přímo	62	78	92	83	99	97
vlevo	29	42	34	38	45	34
vpravo	31	44	36	54	31	24

Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ testujte tvrzení, že

a) průměrné množství automobilů odbočujících doprava a doleva je stejné,
b) průměrné množství automobilů odbočujících je větší než těch, kteří jedou přímo,
c) *v každém okamžiku* je množství automobilů odbočujících menší než těch, kteří jedou přímo,
d) *v každém okamžiku* je množství automobilů odbočujících větší než těch, kteří jedou přímo.

[tvrzení se: a) nezamítá ($p_v = 0.09$), b) zamítá ($p_v = 0.02$), c) zamítá ($p_v = 0.03$), d) zamítá ($p_v = 0.005$)]

2.3.30 Příklad

V rámci měsíce bezpečnosti byla provedená namátková kontrola seřízení světel osobních automobilů. Zaznamenané údaje jsou v centimetrech – pod a + nad optimální úrovní. U každého kontrolovaného vozidla byl změřen jak levý, tak i pravý reflektor s výsledky

č.měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
levý	-3	5	16	9	-8	-2	23	5	-6	-3
pravý	-5	-12	22	-3	-9	1	-1	2	-13	-5

Na hladině 0.05 testujte nulovou hypotézu (uveďte hodnotu testové statistiky a kritický obor)
a) levé i pravé reflektory jsou seřízeny stejně;
b) světla levých reflektorů jsou více sklopená, než světla pravých.

[a) "jsou stejně seřízeny" se nezamítá($p_v = 0.07$), b) "levé jsou níže" se zamítá ($p_v = 0.03$)]

2.3.31 Příklad

Ve skladu je 1200 výrobků od firmy A a 800 výrobků od firmy B. Z výrobků každé firmy bylo testováno 350 výrobků a bylo zjištěno, že 54 výrobků od firmy A a 27 výrobků od firmy B bylo vadných. Na hladině významnosti $\alpha = 0.1$ testujte tvrzení, že firma A nemá větší podíl vadných výrobků než firma B.

[tvrzení se zamítá$\left(p_v = 7 \cdot 10^{-4}\right)$]

2.3.32 Příklad

Na rameni křižovatky byla v nejvytíženější hodinu měřena délka kolony. Měření se provádělo každých 10 minut a zjišťovala se maximální délka kolony v j.v. v daném intervalu a zaznamenávala se do tabulky.

1-10 min	11-20 min	21-30 min	31-40 min	41-50 min	51-60 min
15	21	16	23	15	16

a) Z dlouhodobého měření je zjištěn rozptyl délek kolon $\sigma^2 = 4.1$. Na 95% hladině významnosti testujte tvrzení, že maximální délka kolony je 19 vozidel.
b) Na 95% hladině významnosti testujte tvrzení, že maximální délka kolony je 19 vozidel.

[a) tvrzení se nezamítá($p_v = 0.94$), b) tvrzení se nezamítá($p_v = 0.60$)]

2.3.33 Příklad

Na jedné jednosměrné křižovatce bylo provedeno měření poměru odbočení. V ranní hodině bylo provedeno měření, kdy počet aut odbočujích vlevo byl $L_{rno} = 125$ a $P_{rno} = 76$. V odpolední hodině byl tento poměr vlevo $L_{odpo} = 98$ a $P_{odbo} = 90$. Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ testujte tvrzení, že poměr odbočení vpravo dopoledne i odpoledne je stejný.

[tvrzení se zamítá($p_v = 0.04$)]

2.4 Neparametrické testy hypotéz

2.4.1 Příklad

Následující tabulka udává četnosti nehod ve velké továrně zjištěné během jednoho dne

doba	8-10h.	10-12h.	13-15h.	15-17h.
počet	31	30	41	58

Na hladině významnosti 0.05 testujte tvrzení, že nehody se objevují rovnoměrně po celý den.

[rovnoměrnost zamítáme ($p_v = 0.006$)]

2.4.2 Příklad

Na automatické balicí lince byl sledován počet zastavení chodu automatu v průběhu jedné směny. Byly zjištěny následující údaje

hodina	1	2	3	4	5	6	7	8
počet zastavení	16	17	19	16	24	19	17	16

Na hladině významnosti 0.05 testujte hypotézu, že počet zastavení chodu linky má rovnoměrné rozdělení.

[rovnoměrnost nezamítáme($p_v = 0.89$)]

2.4.3 Příklad

Rodiče s krevní skupinou AB mají děti s krevními skupinami AA, AB, BB. Jestliže hypotéza o dědičnosti podle Mendela je pravdivá, pak by se u potomků měly tyto krevní skupiny vyskytovat v poměru 25%, 50% a 25%. Následující tabulka ukazuje krevní skupiny u 284 dětí jejichž rodiče měli krevní skupinu AB.

skupina	AA	AB	BB
počet	65	152	67

Potvrzují tato data na hladině významnosti 0.05 Mendelovu hypotézu?

[nezamítají ($p_v = 0.49$)]

2.4.4 Příklad

Zjišťovala se závislost mezi barvou vlasů a barvou očí u mužů. V náhodném výběru jsme se dotazovali 6 800 mužů a získali jsme následující údaje

oči \ vlasy	světlé	hnědé	hnědočerné	černé
modré	1768	807	189	47
šedé	946	1387	746	53
hnědé	115	438	288	16

Testujte nezávislost barvy vlasů a očí na hladině významnosti 0.05.

[nezávislost zamítáme ($p_v = 0$)]

2.4.5 Příklad

Na 320 součástkách byla při kontrole měřena výška (X) a šířka (Y). Byly zjištěny následující četnosti dobrých a chybných rozměrů vybraných součástek

X \ Y	dobrá	špatná
dobrá	239	60
špatná	14	7

Na hladině významnosti 0.05 testujte hypotézu o nezávislosti znaků X a Y.

[nezávislost nezamítáme ($p_v = 0.15$)]

2.4.6 Příklad

Na křižovatce jsme v různých intervalech zaznamenávali počty projíždějících automobilů. Měření jsme uspořádaly do tabulky, kde d znamená délku intervalu pozorování a x je počet pozorovaných automobilů.

d [min]	15	10	20	35	10	50
x	71	56	98	121	44	271

Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ testujte tvrzení, že automobily projíždějí rovnoměrně.

[tvrzení zamítáme ($p_v = 0.002$)]

2.4.7 Příklad

Na dvou strojích se pravidelně střídají dva operátoři. Výrobky, které se na strojích vyrobí projdou kontrolou a každý vadný je označen podle stroje a operatora. Byly zjištěny následující údaje:

stroj	1	2	1	1	2	2	2	1	2	1	1	1	2	1	2	2	2	1	2	1	2
operátor	2	2	1	2	1	1	2	2	2	1	2	2	1	2	1	2	2	2	1	1	2

Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ testujte tvrzení, že operátoři a stroje jsou při výrobě zmetků nezávislí.

[tvrzení nezamítáme ($p_v = 0.47$)]

2.4.8 Příklad

Ve skupině 49 chlapců ve věku 9.5 - 10 let, u kterých bylo po dobu nejméně 4 let diagnostikováno určité onemocnění bylo nalezeno 27 chlapců menších než 138.5 cm, což je zjištěný průměr tělesné výšky v populaci chlapců stejného věku při celostátním šetření. Ověřte na 5% hladině významnosti, zda u nemocných dětí je medián výšek menší než průměr v odpovídající věkové skupině všech dětí.

Naměřené výšky dětí ve skupině jsou uvedeny v tabulce

136	127.2	123.2	136.4	120	134.8	138	121.9	137.2	122.7
136.2	137.6	133.7	125.9	130.5	136.4	124.8	130	135.2	121.6
129.1	131.4	130.3	126.5	131.9	135.5	139.9	148.8	143.8	149.5
140.6	145.9	149.1	143	149	144.6	146	149.4	145	138.5
139.4	150	141.8	142.1	141.6	144.4	140.1	144.4	128.4	

[tvrzení nezamítáme ($p_v = 0.24$)]

2.4.9 Příklad

Na základě výsledků 60 hodů jednou hrací kostkou, které jsou zaznamenány v tabulce, rozhodněte, zda jde o kostku spravedlivou (v tom smyslu, že jednotlivé hodnoty na ni padají opravdu se stejnou pravděpodobností). Pozorované četnosti jsou zaznamenány v následující tabulce

počet bodů	1	2	3	4	5	6
počet hodů	8	7	13	9	10	13

[tvrzení o spravedlnosti kostky nezamítáme ($p_v = 0.98$)]

2.4.10 Příklad

Řetězec cukráren, který nabízí 4 druhy zmrzliny otevřel provozovnu v nové lokalitě. Ve stávajících provozovnách řetězce byla dosud struktura prodeje podle druhů zmrzliny následující: vanilková 62 %, čokoládová 18 %, jahodová 12% a pistáciová 8 %. Po otevření provozovny v nové lokalitě máme záznam o následujícím prodeji: vaniková 120, čokoládová 40, jahodová 18, pistáciová 22. Vyjádřete se pomocí statistického testu ke shodě či odlišnosti struktury prodeje v nové lokalitě oproti dosavadním prodejům řetěce při hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

[tvrzení o shodě struktury zamítáme $\left(p_v = 4 \cdot 10^{-11}\right)$]

2.4.11 Příklad

400 studentů bylo dotázáno, zda bylyv uplynulém roce ubytováni na kolejích a jakého průměrného prospěchu v uplynulém studijním roce dosáhli. Na $\alpha = 0.05$ hladině významnosti rozhodněte, zda je vztah mezi tím, zda studenti bydlí na kolejích a tím, jakých studijních výsledků dosahují nezávislý.

kolej\průměr	<1.6	1.6-2.1	>2.1
ano	40	107	93
ne	40	73	47

[tvrzení nezamítáme ($p_v = 0.06$)]

2.5 Regresní analýza

2.5.1 Příklad

V továrně byla sledována závislost celkových nákladů (desítky tis. Kč) na produkci (tis. ks). Byly zaznamenány následující údaje

produkce	532	297	378	121	519	613	592	497
náklady	48	32	42	27	45	51	53	48

a) Určete koeficienty regresní přímky aproximující tato data.
b) Predikujte hodnotu nákladů při produkci 800 000 kusů.
c) Určete výběrový korelační koeficient a s jeho pomocí testujte na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ vhodnost dat pro lineární regresi.
d) Pomocí srovnání vysvětleného a nevysvětleného rozptylu testujte na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ vhodnost dat pro lineární regresi.

[a) $b_1 = 0.053$, $b_0 = 19.51$; b) predikce je 62.32; c) $r = 0.97$, lin. regrese je vhodná $\left(p_v = 4 \cdot 10^{-5}\right)$,d) lin. regrese je vhodná $\left(p_v = 4 \cdot 10^{-5}\right)$]

2.5.2 Příklad

Při sledování závislosti veličiny y na veličině x byla naměřena následující data

veličina x	10	10	10	9	10	11	9	9	11
veličina y	17.6	23.2	16	18.4	21.9	20.8	16.6	14.5	23.2

Zjistěte, zda naměřená data potvrzují na hladině významnosti 0.05 předpoklad, že závislost veličin x a y je možno považovat za lineární. V kladném případě určete, zda se jedná o pozitivní nebo negativní korelovanost.

[lin. regrese je vhodná ($p_v = 0.047$); $r = 0.67$]

2.5.3 Příklad

Do vodní nádrže unikla jedovatá látka. Pro její likvidaci byl aplikován neutralizační prostředek. Od okamžiku jeho aplikace byla několikrát měřena koncentrace jedu s výsledky uvedenými v tabulce

doba (minuty)	5	12	20	26	29	38	65	126
koncentrace (promile)	19	17	18	17	17	15	14	7

a) Za předpokladu přibližně lineárního poklesu koncentrace určete okamžik, kdy koncentrace jedovaté látky bude nulová. Předpoklad závislosti ověřte pomocí p-hodnoty testu pro korelační koeficient.
b) Určete koeficinty regresní přímky a změřené body i přímku zobrazte v grafu.
c) Určete 95% interval spolehlivosti pro regresní přímku v čase $x_p = 100$.

[a) $x_p = 204$, $p_v = 10^{-5}$; b) $b_0 = 19.31$, $b_1 = 0.095$; c) $y_p \in (7.70; 11.95)$]

2.5.4 Příklad

Firma desetkrát zaznamenala své zisky. Ze změřených dat byly vypočítány průměry $\overline{x} = 3$ a $\overline{y} = 34.8$ a součty čtverců, resp. součinů odchylek dat od průměrů $S_{xx} = 10$, $S_{xy} = 13$ a $S_{yy} = 24.8$. Na hladině významnosti testujte tvrzení firmy, že jejich zisky rostou.

[$b_1 = 1.3$, zisky rostou]

2.5.5 Příklad

V továrně byla sledována závislost celkových nákladů N (v tis. Kč) na produkci P (v ks). Z 20 zaznamenaných údajů byly vypočteny průměrné náklady $\overline{y}_N = 29.78$ a průměrná produkce $\overline{x}_P = 298.70$ a součty čtverců, resp. součinů odchylek hodnot od průměrů $s_N^2 = 63.688$, $s_P^2 = 566.49$, resp. $s_{PN} = 95.095$.

a) Pomocí lineární regrese odhadněte, jaké náklady budou pro produkci 1000 výrobků.
b) Testem korelačního koeficientu na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ ověřte vhodnost lineární regrese.

[a) $y_p = 147.5$; b) $r = 0.5$, data jsou vhodná k regresi $\left(p_v = 3 \cdot 10^{-13}\right)$]

2.5.6 Příklad

Na sledovaném procesu byla naměřena data, kde x je nezávisle proměnná a y je závisle proměnná.

x	5	12	20	26	29	38	40	45
y	19	17	12	1	27	35	44	76

a) Pro tato data proveďte polynomiální regresi třetího řádu a regresní polynom spolu daty zobrazte.
b) Pro tato data proveďte exponenciální regresi a regresní polynom spolu s daty zobrazte.
c) Pro tato data proveďte polynomiální regresi čtvrtého řádu a určete hodnotu předpovědi y_p pro $x_p = 65$.
d) Při použití exponenciální regrese určete y_p pro $x_p = 55$.
e) Pomocí chyb predikce porovnejte, zda je vhodnější polynomiální regrese třetího řádu či exponenciální regrese.

[a)$b = [0.025\ -0.010\,0.647\,18.210]$; b)$b = [0.18\,0.3]$; c) $y_p = 329.49$; d)$y_p = 605.93$; e) predikce rozptylů jsou $s^2_{pol} = 20.5$ a $s^2_{exp} = 62.4$]

2.5.7 Příklad

Na sledovaném procesu ybla naměřena data, kde x_1 resp. x_2 jsou závisle proměnné a y je nezávisle proměnná.

x_1	15	12	11	9	9	8	5	3
x_2	3	9	5	11	28	14	32	58
y	9	7	22	12	27	31	44	36

Pro tato data proveďte vícenásobnou lineární regresi a:

a) testujte její vhodnost pomocí testu na bělost reziduí (prvky výběru jsou nezávislé),
b) testujte její vhodnost pomocí F-testu,
c) zjistěte koeficienty regrese. Hodnoty y a predikce y_p zobrazte v grafu.

[a) nezamítáme tvrzení ($p_v = 0.98$) ; b) zamítáme tvrzení ($p_v = 0.007$); c)$b = [-3.28\ \ -0.07\ 54.42]$]

2.5.8 Příklad

Na sledovaném procesu byla naměřena data , kde x_1 resp. x_2 jsou závisle proměnné a y je nezávisle proměnná.

x_1	1	3	4	5	7	8	9
x_2	1	2	3	6	7	8	9
y	5.1	8.9	11.3	12.6	17.1	19.2	20.1

Byla provedena vícenásobná lineární regrese a lineární regrese pro x_1 resp. x_2. Na základě výpočtu byly získány koeficienty a vypočteny predikce y_{p12} a y_{p1} resp. y_{p2}.

y_{p12}	5.09	9.18	11.13	12.70	26.79	18.74	20.69
y_{p1}	5.17	9.04	10.98	12.92	16.79	18.73	20.67
y_{p22}	6.32	8.04	9.77	14.95	16.68	18.41	20.13

a) Pomocí F-testu rozhodněte, která z regresí je lepší.
b) Určete součet kvadrátů reizduí a podle něho určete, která z regresí je nejlepší.

[a) $y_{p12}: p_v = 2.8 \cdot 10^{-6}$, $y_{p1}: p_v = 3.5 \cdot 10^{-6}$, $y_{p12}: p_v = 6 \cdot 10^{-4}$; b) $s_{12} = 0.77$, $s_1 = 0.86$, $s_2 = 10.89$]

2.5.9 Příklad

Pro voltametrické stanovení Cd ve vodných vzorcích byla naměřena následující kalibrační data c v ng ml^{-1} a I v nA.

c	0.562	1.124	1.168	2.248	2.81	3.372	3.934	5.508	6.182	7.306	8.43	9.55
I	0.38	0.88	1.5	2.12	2.63	3.12	3.62	4.25	5.38	6.37	7.13	8.39

a) Určete parametry kalibrační přímky. Prochází přímka počátkem?
b) Utestuje vhodnost pro regresi.
c) Určete 5% IS pro regresní přímku pro obsah $c_p = 12$.

[a) $b = [0.15\ 0.84]$, neprochází; b) data jsou vhodná pro regresi $\left(p_v = 10^{-11}\right)$; c) $c_p \in (10.24,\ 10.28)$]

2.5.10 Příklad

Zaměstnanci firmy se zapracovávají na nové výrobní lince. Pro šest zamšatnanců je zaznamenán počet dosud odpracovaných hodin x k zjištěnému procentuálnímu podílu zmetků y.

x	82	86	87	87	91	95
y	11	10	12	9	10	8

a) Určete parametry regresní přímky a nalezenou přímku interpretujte.
b) Testuje na 5% hladině významnosti vhodnost dat pro regresi.

[a) $b = [28.48\ \ -0.21]$; b) data nejsou vhodná k regresi $(p_v = 0.15)$]

2.6 Analýza rozptylu

2.6.1 Příklad

Závod má tři pobočky - A, B a C. V následující tabulce jsou uvedeny produkce jednotlivých poboček za půl roku (pro jednotlivé měsíce v tis. ks.)

	A	B	C
leden	59	84	36
únor	55	39	31
březen	65	32	46
duben	61	63	36
květen	60	64	47
červen	50	84	56

Určete hodnotu F statistiky a p-hodnotu testu ANOVA pro shodu středních hodnot.

[f-test: $F = 3.21$; anova: $p_v = 0.07$]

2.6.2 Příklad

Tři kamarádi, Tomáš, Petr a Martin, se domluvili, že budou pravidelně navštěvovat posilovnu. Sve návštěvy zapisovali a jejich počet za jednotlivá čtvrtletí je v tabulce.

	Tomáš	Petr	Martin
I	31	25	22
II	32	31	16
III	35	28	19
IV	52	38	29

Určete hodnotu F statistiky a p-hodnotu testu ANOVA pro shodu středních hodnot.

[f-test: $F = 4.88$; anova: $p_v = 0.04$]

2.6.3 Příklad

Tři kamarádky, Tereza, Pavla a Marie, se domluvili, že budou pravidelně navštěvovat posilovnu. Sve návštěvy zapisovali a jejich počet za jednotlivá čtvrtletí je v tabulce.

	Tereza	Pavla	Marie
I	31	25	22
II	32	31	16
III	35	28	19
IV	52	38	29

Určete hodnoty F statistik a p-hodnoty testu ANOVA s dvojným tříděním pro shodu středních hodnot frekvence návštěv posilovny pro jednotlivá děvčata a pro jednotlivá čtvrtletí.

[f-test: $F_s = 18.09$, $F_s = 9.13$; anova: $p_v = 0.003$, $p_v = 0.02$]

2.6.4 Příklad

Na třech vybraných místech byla namátkou měřena rychlost automobilů. Měřio se ráno, dopoledne a odpoledne. Na prvním míste byly naměřeny hodnoty 69, 58 a 83 km/h, na druhém 71, 45 a 58 km/h a na třetím místě 48, 55 a 98 km/h. Proveďte analýru rozptylu pro střední rychlosti s tříděním podle místa a času. Uveďte hodnoty F statistik a p-hodnoty.

[f-test: $F_s = 0.47$, $F_s = 2.24$; anova: $p_v = 0.66$, $p_v = 0.22$]

2.6.5 Příklad

Sledujeme tři stroje. Náhodně zjišťujeme jejich hodinové produkce (P1, P2 a P3). Je pravdivé tvrzení, že na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ jsou průměrné prudukce všech tří strojů shodné?

P1	53	55	49	58	52	61	56	55
P2	49	56	52	45	51	56	44	51
P3	52	53	52	54	55	53	53	52

[tvrzení nezamítáme ($p_v = 0.06$)]

2.6.6 Příklad

V měsíci bezpečnosti sledujeme počet nehod na pěti pražských křižovatkách. Výsledky jsou v následující tabulce

křiž.č.\rok	1999	2000	2001	2002	2003
1	3	5	2	1	3
2	6	2	5	3	4
3	3	2	1	1	2
4	4	1	1	2	2
5	1	2	5	5	6

Lze na hladině významnosti $\alpha = 0.01$ tvrdit, že průměrný počet nehod je na všech křižovatkách stejný?

[tvrzení zamítáme ($p_v = 0.02$)]

2.6.7 Příklad

V továrně na automobilové součástky jsou tři stejné stroje na nichž se střídá pět operátorů. Sledujeme počty vyrobených zmetků na jednotlivých strojích (S) a při práci jednotlivých operátorů (O). Zjištěné údaje jsou v tabulce

	O1	O2	O3	O4	O5
S1	3	5	8	6	2
S2	4	2	6	5	4
S3	2	6	7	5	3

Určete, zda průměrné počty vyrobených zmetků jsou shodné. V opačném případě určete, zda rozdíly jsou způsobeny rozdílností strojů nebo operátorů. Testujte na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

[a) stroje jsou shodné: tvrzení nezamítáme ($p_v = 0.78$); b) operátoři jsou stejní: tvrzení zamítáme ($p_v = 0.03$)]

2.6.8 Příklad

Sledujeme délky kolony v m ve čtyřech ramenech vybrané pražské křižovatky v 10:00 h pro různé pracovní dny. Zjištěné údaje jsou v tabulce

rameno\den	Po	Út	St	Čt	Pá
č. 1	32	45	55	39	48
č. 2	36	33	22	25	28
č. 3	45	42	44	51	48
č. 4	22	25	38	49	41

Určete, zda průměrné kolony v křižovatce jsou stejné. V opačném případě určete, zda rozdíly jsou způsobeny rozdílností ramen křižovatky nebo konkrétním dnem v týdnu. Testujte na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

[a) ramena jsou shodná: tvrzení zamítáme ($p_v = 0.03$); b) dny jsou stejné: tvrzení nezamítáme ($p_v = 0.65$)]

2.6.9 Příklad

V různých městech jme se dorazovali mužů a žen, kolik hodin denně v průměru stráví za volanem. Odpovědi jsme zaznemanali do následující tabulky

	Praha	Plzeň	Brno	Ostrava	Cheb
ženy	50	35	48	32	16
muži	58	25	47	30	18

Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ testujte, zda muži i ženy ve zkoumaných městech stráví v průměru stejně času za volantem. V opačném případě určete, zdra rozdíly jsou způsobeny rozdílností měst nebo typem řidiče.

[a) typ města: tvrzení zamítáme ($p_v = 0.006$); b) typ řidiče: tvrzení nezamítáme ($p_v = 0.84$)]

2.6.10 Příklad

Liší se velikost dospělých octomilek v závislosti na výživě a genotypu? Samičky od obou genotypů byly pěstovány na třech druzích výživy. Jedinci následující generace byli změřeni. Hodnoty znázorňují průměr v relativních jednotkách.

	výživa 1	výživa 2	výživa 3
genotyp 1	18.375	24.125	26.375
genotyp 2	16.250	18.125	22.375

Testujte na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

[a) výživa: tvrzení nezamítáme ($p_v = 0.07$); b) genotyp: tvrzení nezamítáme ($p_v = 0.07$)]

2.7 GENEROVÁNÍ DAT

2.7.1 Příklad

Generujte data $x = 2,\ 4,\ ...,\ 1000$. Určete jejich střední hodnotu, výběrový rozptyl a směrodatnou odchylku.

[$\overline{x} = 501$, $s^2 = 83500$, $s = 289$]

2.7.2 Příklad

Generujte data $x = -500,\ -495,\ -490,\ ...,\ 500$. Určete jejich počet, medián a součet čtverců.

[$n = 201$, $\tilde{x}_{0.5} = 0$, $\Sigma x^2 = 1.69 \cdot 10^7$]

2.7.3 Příklad

Generujte data $x = 1,\ 2,\ ...,\ 100$ a $y = 2x + 1$. Určete kovarianci a korelační koeficient těchto dat.

[$s_{x,y} = 1683$, $r = 1$]

2.7.4 Příklad

Generujte data $x = 100,\ 99,\ ...,\ 1$ a $y = x^2$. Určete kovarianci a korelační koeficient těchto dat.

[$s_{x,y} = 85008$, $r = 0.97$]

2.7.5 Příklad

Generujte 1000 dat z binomického rozdělení s parametry $n = 10$ a $p = 0.2$. Určete jejich střední hodnotu a nakreslete histogram.

2.7.6 Příklad

Generujte 1500 dat z Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda = 3$. Určete jejich střední hodnotu a nakreslete histogram.

2.7.7 Příklad

Generujte 500 dat z exponenciálního rozdělení s parametrem $a = 3$. Určete jejich střední hodnotu a nakreslete histogram.

2.7.8 Příklad

Generujte 300 dat z rovnoměrného rozdělení s parametry $a = 3$, $b = 8$. Určete jejich střední hodnotu a nakreslete histogram.

2.7.9 Příklad

Generujte 800 dat z normálního rozdělení se střední hodnotou -4 a rozptylem 3. Určete jejich medián a nakreslete histogram.