- Evženie Uglickich, http://staff.utia.cas.cz/uglickich
  - skripta, přednášky
  - materiály ke cvičení
  - konzultační hodiny – osobně/MS Teams
  - moodle
- Zápočet: body za práci v hodinách
- Zkouška:
  - pouze v zimním zkouškovém období
  - ústní forma
  - 5 otázek
  - otázky jsou na webu
  - předtermín
  - doktorandi – témata v oblasti analýzy dat

O čem je předmět Stochastické systémy?

- Během semestru – pokročilé metody analýzy dat
- Slouží k tomu, abychom mohli vytvořit model pozorovaného systému pouze z naměřených dat
- Pro analýzu dat budeme používat metody Bayesovské statistiky – k tomu budeme muset využít znalosti statistiky z 1. ročníku

Formální označení a definice systému

Můžeme měřit, ale neovlivníme

Neměříme, nepředpovídáme - neurčitost

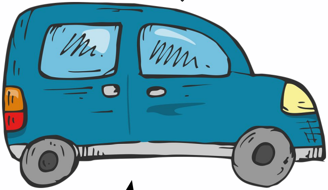
e_t **Šum** Únava, zkušenosti, dopravní situace atd

v_t Sklon vozovky, povrch atd

Externí vstup

u_t **Řídící vstup**

Plynový pedál, převodovka, brzda



y_t **Výstup**

Spotřeba paliva, rychlost atd.

Tím řídíme a ovlivňujeme výstup, tj můžeme si vybrat

Systém - část reality, kterou pozorujeme, chceme popsat a ovlivnit

Měříme a modelujeme

Veličiny na systému

Systém – část reality, kterou chceme matematicky popsat

Výstup y_t – měříme a pomocí modelu předpovídáme a ovlivňujeme

Řídící vstup u_t – můžeme nastavit, abychom ovlivnili výstup

Externí vstup v_t – nemůžeme měnit, ale měříme. Ovlivňuje výstup

Stav x_t – nelze měřit, modelujeme ho pomocí výstupu a vstupu

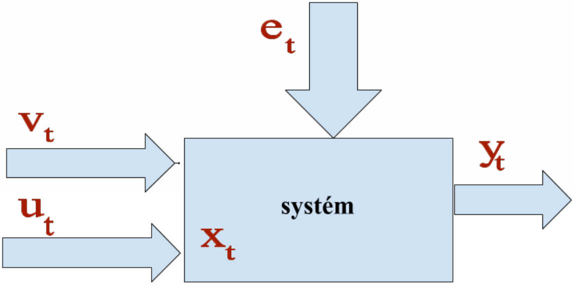
- y_t, u_t, v_t – naměřená data
- Proč index t? – měříme veličiny v diskrétním čase (sek, min)

- Práce pouze s daty – systém je deterministický
- V realitě systém je pod vlivem neurčitosti
- Šum e_t – složka, která přináší neurčitost, kterou nelze měřit ani předpovídat

Stochastický systém = systém pod vlivem neurčitosti

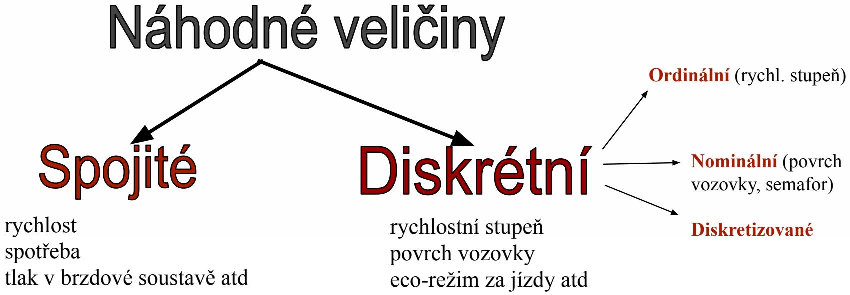
Tři základní úlohy, které budeme řešit v semestru:

1. Modelování výstupu – matematický popis vztahu mezi výstupem systému, vstupem a externím vstupem za podmínky neurčitosti
   - Odhad parametrů modelu
2. Předpověď (predikce) výstupu
3. Řízení systému – volba a nastavení řídícího vstupu, kterým ovlivníme výstup podle našich požadavků



Opakování ze statistiky – náhodné veličiny

- Všechny veličiny na systému – náhodné veličiny
- Náhodná veličina – veličina, při jejímž opakovaném meření dostáváme různé hodnoty, a to jak se její hodnoty mění, je dáno rozdělením náhodné veličiny
- Realizace náhodné veličiny – její naměřená hodnota v čase t



Opakování ze statistiky – rozdělení náhodné veličiny

Rozdělení náhodné veličiny určuje jak se mění její hodnoty

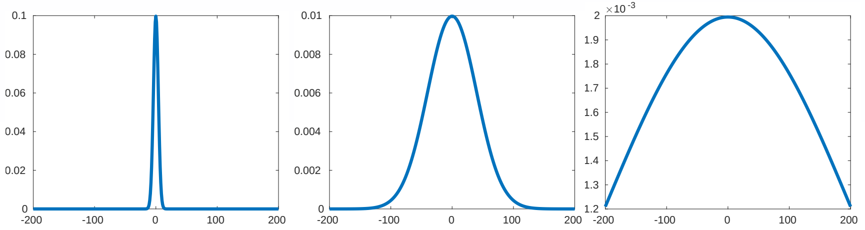
Pro spojitou náhodnou veličinu – hustota pravděpodobnosti (hp)

Normální (Gaussovo) rozdělení

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} r^{-0.5} \exp\left\{ -\frac{1}{2r} (y-\mu)^2 \right\}$$

r – rozptyl, μ – střední hodnota

větší rozptyl = více neurčitosti



Opakování ze statistiky – rozdělení náhodné veličiny

Pro diskrétní náhodnou veličinu – pravděpodobnostní funkce (pf)

Kategorické rozdělení

$y \in \{1, 2, 3\}$ – 3 nebo více možných realizací

y	1	2	$\cdots$	n
$f(y)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

$$\forall p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Příklad: semafor

y	1	2	3
$f(y)$	0.3	0.6	0.1

Alternativní rozdělení

$y \in \{1, 2\}$ – vždy pouze 2 možné realizace

y	1	2
$f(y)$	p	$1-p$

Příklad: odbočení doprava/doleva

y	1	2
$f(y)$	0.8	0.2

Opakování ze statistiky – náhodný vektor

Náhodný vektor $[y, u]$ – vztah mezi veličinami

$$\underbrace{f(y,u)}_{\text{sdružené}} = \underbrace{f(y|u)}_{\text{podmíněné}} \cdot \underbrace{f(u)}_{\text{marginální}} = \overbrace{f(u|y)f(y)}^{\text{totéž obráceně}},$$

Sdružené rozdělení $f(y,u)$ popisuje obě veličiny y a u najednou

Podmíněné rozdělení $f(y|u)$ – chování veličiny y za podmínky znalosti u

Marginální rozdělení $f(u)$ – informace pouze o veličině u

Výpočet podmíněného rozdělení

$$\underbrace{f(y|u)}_{\text{podmíněné}} = \frac{\overbrace{f(y,u)}^{\text{sdružené}}}{\underbrace{f(u)}_{\text{marginální}}}$$

Příklad pro diskrétní náhodné veličiny

- Pozorovaný systém – úsek silnice
- Výstup $y_t \in \{1,2,3\}$ – typ pohonu projíždějících automobilů (benzínový, naftový, hybridní)
- Vstup $u_t \in \{1,2\}$ – jízdní pruh (levý, pravý)
- Ze sdruženého rozdělení $f(y_t, u_t) \Rightarrow$ marginální $f(y_t)$ a $f(u_t)$:

$\sum_{i,j}^{n,m} p_{ij} = 1$

u_t \ y_t	1	2	3
1	0.2	0.25	0.1
2	0.11	0.15	0.19

$\Rightarrow$

$f(u_t)$
0.2+0.25+0.1=0.55
0.11+0.15+0.19=0.45

$\Downarrow$

$f(y_t)$	0.2+0.11=0.31	0.4	0.29

$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Příklad pro diskrétní náhodné veličiny

Výpočet podmíněného rozdělení

$$\underbrace{f(y_t|u_t)}_{\text{podmíněné}} = \frac{\overbrace{f(y_t, u_t)}^{\text{sdružené}}}{\underbrace{f(u_t)}_{\text{marginální}}}$$

$u_t \backslash y_t$	1	2	3
1	0.2	0.25	0.1
2	0.11	0.15	0.19

:

$f(u_t)$
0.55
0.45

=

$u_t \backslash y_t$	1	2	3		
1	$\frac{0.2}{0.55} = 0.36$	$\frac{0.25}{0.55} = 0.46$	0.18	$\Rightarrow$	1
2	$\frac{0.11}{0.45} = 0.25$	$\frac{0.15}{0.45} = 0.33$	0.42	$\Rightarrow$	1

Příklad pro spojité náhodné veličiny

Sdružená hp: $f(x,y) = 6x^2y, \text{ pro } \quad x, y \in (0, 1),$

Marginální hp: $f(x) = \int_0^1 6x^2y\,dy = \left[6x^2\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 3x^2$

Marginální hp: $f(y) = \int_0^1 6x^2y\,dx = \left[6\frac{x^3}{3}y\right]_0^1 = 2y$

Podmíněná hp: $f(x|y) = \dfrac{f(x,y)}{f(y)} = \dfrac{6x^2y}{2y} = 3x^2$

Podmíněná hp: $f(y|x) = \dfrac{f(x,y)}{f(x)} = \dfrac{6x^2y}{3x^2} = 2y$

Můžeme ukázat, že x a y jsou nezávislé:

$$f(x)f(y) = 3x^2 2y = 6x^2y = f(x,y).$$