Přednáška 10 – Řízení s regresním modelem

Optimální řízení

- představy o chování systému + požadavky k řízení
- optimální hodnota u_t^* v čase t

s_t – požadovaná hodnota (setpoint)
ω, λ – penalizace (volí se expertně)
Např., $\omega = 1$, $\lambda = 0.1$

Penalizační funkce (příklady)

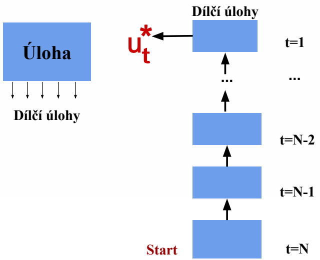
$$J_t = (y_t - s_t)^2\omega + (u_t - u_{t-1})^2\lambda$$
$$J_t = y_t^2 + \lambda u_t^2$$

Minimalizace – dynamické programování

Kritérium optimality

N – interval řízení
Součet penalizací → min
J_t – náhodná veličina

$$E[\sum_{t=1}^{N} J_t|d(0)] \rightarrow \min_{u_t}$$

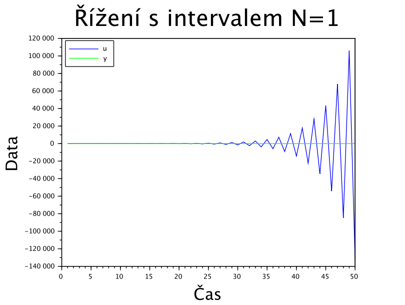


Nebezpečí řízení s $N = 1$ – nebere se v úvahu vývoj výstupu (jenom y_{t+1})

Program – řízení s intervalem $N = 1$

```
clear, clc, close
nd=50; % počet dat
b0=.8; a1=.8; b1=1; % regresní koeficienty
y(1)=3; u(1)=0; % počáteční podmínky
for t=2:nd
  u(t)=-1/b0*(a1*y(t-1)+b1*u(t-1)); % řídící vstup
  % výstup
  y(t)=b0*u(t)+a1*y(t-1)+b1*u(t-1)+.1*randn(1,1);
end
```

$$y_t = b_0 u_t + a_1 y_{t-1} + b_1 u_{t-1} + e_t$$



Dynamické programování – Bellmanův princip optimality

Výpočet u_t^* s ohledem na další vývoj y_t + použití v čase t

Bellmanovy rovnice:

1. Výpočet střední hodnoty $\varphi_t = E[\varphi_{t+1}^* + J_t | u_t, d(t-1)]$
2. Minimalizace
$$\varphi_t^* = \min_{u_t} \varphi_t$$

Pro čas $t = N, N-1, N-2, \ldots, 1$ $\qquad \varphi_{N+1}^* = 0$

Výsledek – vzorec v čase t

$$u_t^* = \arg\min \varphi_t(d(t-1))$$

Příklad:

Regresní model $y_t = b_0 u_t + a_1 y_{t-1} + b_1 u_{t-1} + a_2 y_{t-2} + b_2 u_{t-2} + k + e_t$

ve stavovém tvaru $\qquad x_t = M x_{t-1} + N u_t + \omega_t$

Stav $x_t = [y_t \;\; u_t \;\; y_{t-1} \;\; u_{t-1} \;\; 1]'$

Penalizační funkce

$J_t = y_t^2 + \lambda u_t^2 = x_t' \Omega x_t$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Příklad řízení s regresním modelem – odvození

Počáteční podmínky: $\varphi^*_{t+1} = x_t' R_{t+1} x_t = 0$

Bellmanovy rovnice:

$$\varphi_t = E\left[\underbrace{x_t'\Omega x_t}_{J_t} + \underbrace{x_t' R_{t+1} x_t}_{\varphi^*_{t+1}} \,|u_t, d(t-1)\right] \quad \text{Označíme } U = \Omega + R_{t+1}$$

$$= E\left[x_t' U x_t\right] = \underbrace{(Mx_{t-1} + Nu_t)'}_{\text{střední hodnota}} U (Mx_{t-1} + Nu_t) =$$

$$= x_{t-1}' \underbrace{M'UM}_{C} x_{t-1} + 2u_t' \underbrace{N'UM}_{B} x_{t-1} + u_t' \underbrace{N'UN}_{A} u_t =$$

Využijeme doplnění na čtverec a algebraické úpravy:

$$= u_t' A u_t + 2u_t' A \underbrace{(A^{-1}B)}_{S_t} x_{t-1} + x_{t-1}' S_t' A S_t x_{t-1} + x_{t-1}' C x_{t-1} -$$

$$- x_{t-1}' S_t' A S_t x_{t-1} =$$

$$= (u_t + S_t x_{t-1})' A (u_t + S_t x_{t-1}) + x_{t-1}' \underbrace{(C - S_t' A S_t)}_{R_t} x_{t-1}$$

Optimální řízení: $u_t^* = -S_t x_{t-1}$

Příklad řízení s regresním modelem – algoritmus

Rekurzivní algoritmus

1. Pro čas $t = N + 1$ nastavíme počáteční podmínky $R_{N+1} = 0$
2. Pro čas $t = N, N-1, N-2, \ldots, 1$

$$U = \Omega + R_{t+1}$$

$$A = N' U N$$

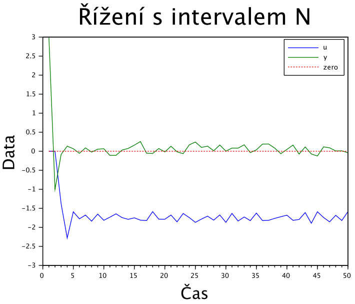
$$B = N' U M$$

$$C = M' U M$$

$$S_t = A^{-1} B$$

$$R_t = C - S_t' A S_t$$

$$u_t = -S_t x_{t-1}$$



Poznámka

- J_t s setpointy
  $u_t^* = \arg\min \varphi_t(s_t, d(t-1))$

```
clear, clc, close
nd=50; % interval řízení
% parametry
b0=1; a1=.8; b1=.6; a2=-.3; b2=.1; k=3; sd=.1;
% počáteční podmínky
y(1)=3; y(2)=-1; u(1)=0; u(2)=0;
la=.1; % penalizace u_t
M= [a1 b1 a2 b2 k; % parametry ve stavovém tvaru
     0 0 0 0 0;
     1 0 0 0 0;
     0 1 0 0 0;
     0 0 0 0 1];
N= [b0 1 0 0 0]';
% penalizační funkce
Om=[1 0 0 0 0;
   0 la 0 0 0;
   0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0];
```

```
R=zeros(5,5); % počáteční podmínky pro optimalizaci
S=list();
for t=nd:-1:2 % cyklus optimalizace
   U=R+Om;
   A=N'*U*N;
   B=N'*U*M;
   C=M'*U*M;
   S(t)=inv(A)*B;
   R=C-S(t)'*A*S(t);
end
for t=3:nd % cyklus aplikace
  x=[y(t-1) u(t-1) y(t-2) u(t-2) 1]'; % stav
  u(t)=-S(t)*x; % řídící vstup
  e(t)=sd*randn(1,1); % šum
  y(t)=b0*u(t)+a1*y(t-1)+b1*u(t-1)+a2*y(t-2)+b2*u(t-2)+...
  +k+e(t); % výstup
end
```

Příklad – řízení auta s doporučenou rychlostí

y_t – rychlost auta $[km/h]$

s_t – doporučená rychlost $[km/h]$

u_t – poloha pedálu plynu [%]

$$J_t = (y_t - s_t)^2\omega + (u_t - u_{t-1})^2\lambda$$