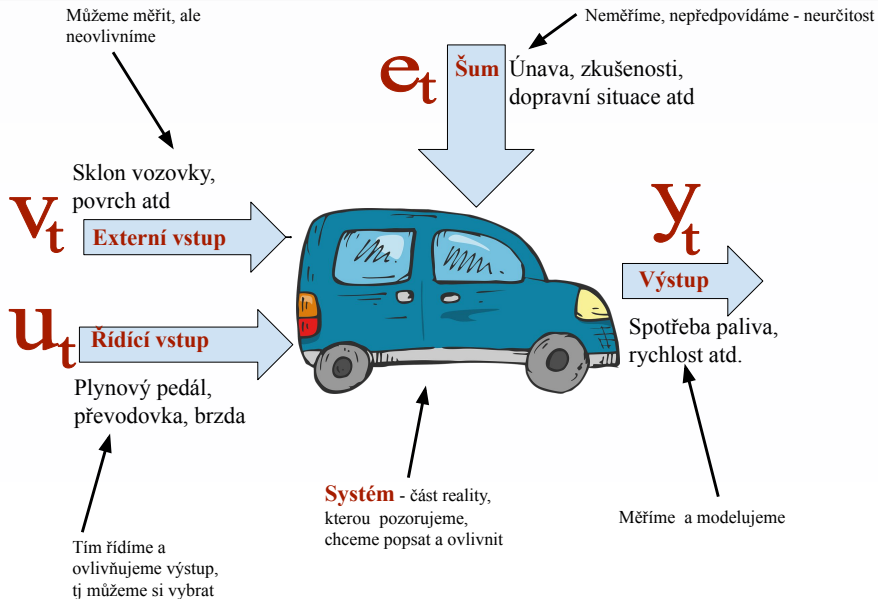


- Evženie Uglickich, <http://staff.utia.cas.cz/uglickich>
 - skripta, přednášky
 - materiály ke cvičení
 - konzultační hodiny – osobně/MS Teams
 - moodle
- Zápočet: body za práci v hodinách
- Zkouška:
 - pouze v zimním zkuškovém období
 - ústní forma
 - 5 otázek
 - otázky jsou na webu
 - předtermín

O čem je předmět Matematické modely a jejich aplikace?

- metody modelování naměřených dat
- různé typy dat – spojitá, diskrétní, smíšená
- Pro analýzu dat budeme používat metody Bayesovské statistiky – k tomu budeme muset využít znalosti statistiky z 1. ročníku

Formální označení a definice systému



Veličiny na systému

Systém – část reality, kterou chceme matematicky popsat

Výstup y_t – měříme a pomocí modelu předpovídáme a ovlivňujeme

Řídící vstup u_t – můžeme nastavit, abychom ovlivnili výstup

Externí vstup v_t – nemůžeme měnit, ale měříme. Ovlivňuje výstup

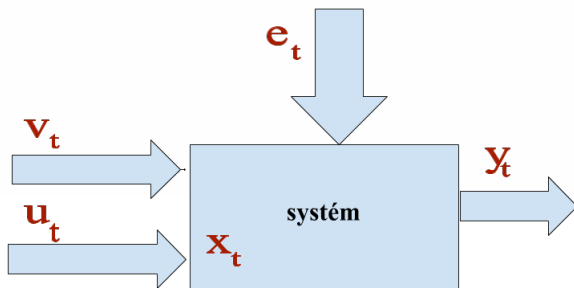
Stav x_t – nelze měřit, modelujeme ho pomocí výstupu a vstupu

- y_t, u_t, v_t – naměřená data
- Proč index t ? – měříme veličiny v diskrétním čase (sek, min)
- Práce pouze s daty – systém je deterministický
- V realitě systém je pod vlivem neurčitosti
- Šum e_t – složka, která přináší neurčitost, kterou nelze měřit ani předpovídat

System je pod vlivem neurčitosti

Tři základní úlohy, které budeme řešit v semestru:

- 1 Modelování výstupu – matematický popis vztahu mezi výstupem systému, vstupem a externím vstupem za podmínky neurčitosti
 - Odhad parametrů modelu
- 2 Předpověď (predikce) výstupu
- 3 Řízení systému – volba a nastavení řídicího vstupu, kterým ovlivníme výstup podle našich požadavků



- Všechny veličiny na systému – náhodné veličiny
- Náhodná veličina – veličina, při jejímž opakovaném měření dostáváme různé hodnoty, a to jak se její hodnoty mění, je dáno rozdělením náhodné veličiny
- Realizace náhodné veličiny – její naměřená hodnota v čase t

Náhodné veličiny

Spojité

rychlost
spotřeba
tlak v brzdové soustavě atd

Diskrétní

rychlostní stupeň
povrch vozovky
eco-režim za jízdy atd

Ordinální (rychl. stupeň)

Nominální (povrch vozovky, semafor)

Diskretizované

Opakování ze statistiky – rozdělení náhodné veličiny

Rozdělení náhodné veličiny určuje jak se mění její hodnoty

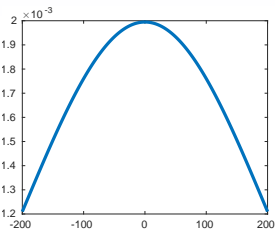
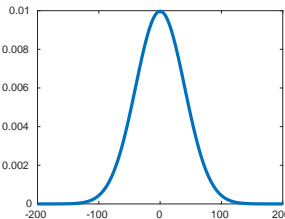
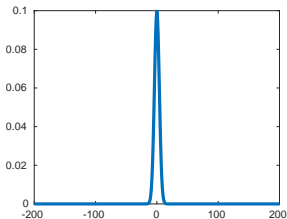
Pro spojitou náhodnou veličinu – hustota pravděpodobnosti (hp)

Normální (Gaussovo) rozdělení

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} r^{-0.5} \exp \left\{ -\frac{1}{2r} (y - \mu)^2 \right\}$$

r – rozptyl, μ – střední hodnota

větší rozptyl = více neurčitosti



Opakování ze statistiky – rozdělení náhodné veličiny

Pro diskrétní náhodnou veličinu – pravděpodobnostní funkce (pf)

Kategorické rozdělení

$y \in \{1, 2, 3\}$ – 3 nebo více možných realizací

y	1	2	...	n
$f(y)$	p_1	p_2	...	p_n

$$\forall p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Příklad: semafor

y	1	2	3
$f(y)$	0.3	0.6	0.1

Alternativní rozdělení

$y \in \{1, 2\}$ – vždy pouze 2 možné realizace

y	1	2
$f(y)$	p	$1 - p$

Příklad: odbočení doprava/doleva

y	1	2
$f(y)$	0.8	0.2

Opakování ze statistiky – náhodný vektor

Náhodný vektor $[y, u]$ – vztah mezi veličinami

$$\underbrace{f(y, u)}_{\text{sdužené}} = \underbrace{f(y|u)}_{\text{podmíněné}} \cdot \underbrace{f(u)}_{\text{marginální}} = \overbrace{f(u|y)f(y)}^{\text{totéž obráceně}},$$

Sdužené rozdělení $f(y, u)$ popisuje obě veličiny y a u najednou

Podmíněné rozdělení $f(y|u)$ – chování veličiny y za podmínky znalosti u

Marginální rozdělení $f(u)$ – informace pouze o veličině u

Výpočet podmíněného rozdělení

$$\underbrace{f(y|u)}_{\text{podmíněné}} = \frac{\overbrace{f(y, u)}^{\text{sdužené}}}{\underbrace{f(u)}_{\text{marginální}}}$$

Příklad pro diskrétní náhodné veličiny

- Pozorovaný system – úsek silnice
- Výstup $y_t \in \{1, 2, 3\}$ – typ pohonu projíždějících automobilů (benzínový, naftový, hybridní)
- Vstup $u_t \in \{1, 2\}$ – jízdní pruh (levý, pravý)
- Ze sduženého rozdělení $f(y_t, u_t) \Rightarrow$ marginální $f(y_t)$ a $f(u_t)$:

$$\sum_{i,j}^{n,m} p_{ij} = 1$$

$y_t \backslash u_t$	1	2	3
1	0.2	0.25	0.1
2	0.11	0.15	0.19

 \Rightarrow

$f(u_t)$
$0.2+0.25+0.1=0.55$
$0.11+0.15+0.19=0.45$

 \Downarrow

$f(y_t)$	$0.2+0.11=0.31$	0.4	0.29
----------	-----------------	-----	------

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Příklad pro diskrétní náhodné veličiny

Výpočet podmíněného rozdělení

$$\underbrace{f(y_t|u_t)}_{\text{podmíněné}} = \frac{\overbrace{f(y_t, u_t)}^{\text{sdružené}}}{\underbrace{f(u_t)}_{\text{marginální}}}$$

$y_t \backslash u_t$	1	2	3
1	0.2	0.25	0.1
2	0.11	0.15	0.19

$$: \begin{array}{|c|} \hline f(u_t) \\ \hline 0.55 \\ \hline 0.45 \\ \hline \end{array} =$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & y_t & 1 & 2 & 3 \\ \hline u_t & & & & \\ \hline 1 & & \frac{0.2}{0.55} = 0.36 & \frac{0.25}{0.55} = 0.46 & 0.18 \\ \hline 2 & & \frac{0.11}{0.45} = 0.25 & \frac{0.15}{0.45} = 0.33 & 0.42 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array}$$

Příklad pro spojité náhodné veličiny

Sdružená hp: $f(x, y) = 6x^2y$, pro $x, y \in (0, 1)$,

Marginální hp: $f(x) = \int_0^1 6x^2y dy = \left[6x^2 \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = 3x^2$

Marginální hp: $f(y) = \int_0^1 6x^2y dx = \left[6 \frac{x^3}{3} y \right]_0^1 = 2y$

Podmíněná hp: $f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f(y)} = \frac{6x^2y}{2y} = 3x^2$

Podmíněná hp: $f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f(x)} = \frac{6x^2y}{3x^2} = 2y$

Můžeme ukázat, že x a y jsou nezávislé:

$$f(x)f(y) = 3x^2 2y = 6x^2y = f(x, y).$$