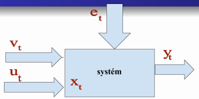
Přednáška 2 – Regresní model + model ve stavovém tvaru



- Náhodné veličiny na systému – spojité nebo diskrétní

Princip stochastického modelu se spojitými veličinami

Matematický popis vztahu y_t a jiných veličin $+\ e_t$

Příklad: Pozorovaný systém – úsek silnice s nehodou

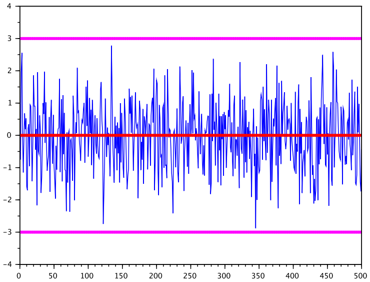
- y_t – délka kolony [m] v čase t
- v_t – počet přijíždějících aut
- y_{t-1} – zpožděná hodnota
- parameter θ – průměrná délka auta (odhad)

Deterministický model: $y_t \quad = \quad y_{t-1} + \theta v_t$

Stochastický model: $y_t \quad = \quad y_{t-1} + \theta v_t + e_t \quad \Rightarrow$ hp $\; f(y_t | y_{t-1}, v_t, \theta)$

Bílý šum s normálním rozdělením

Nemění své stochastické vlastnosti:



- Střední hodnota šumu $E[e_t] = 0$
- Konstantní rozptyl šumu $D[e_t] = r$
- Jednotlivé složky šumu – navzájem nezávislé

Příklad:

- Odlet letadel ± 2 min – bílý šum
- Zpoždění narůstá $+2$ min, $+1$ min, $+2$ min, ... – ~~bílý šum~~

hp šumu $\quad f(e_t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi r}} \exp\{-\dfrac{1}{2r} e_t^2\}$

Princip stochastického modelu se spojitými veličinami

Příklad (délka kolony):

$$y_t = \underbrace{y_{t-1} + \theta v_t}_{\text{determ. část}} + \underbrace{e_t}_{\text{stochast. část}}$$

$$e_t = y_t - \underbrace{(y_{t-1} + \theta v_t)}_{\hat{y}_t}$$

Dosadíme $y_t - \hat{y}_t$ místo e_t do hp šumu: $f(e_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \exp\{-\frac{1}{2r} e_t^2\}$

$$f(y_t | y_{t-1}, v_t, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \exp\{-\frac{1}{2r}(y_t - \hat{y}_t)^2\}$$

střední hodnota $\hat{y}_t$, rozptyl r

model

diferenční rovnice   hp

Lineární regresní model s normálním šumem – obecně

$$y_t = \psi_t'\theta + e_t$$

Regresní vektor (data) $\quad \psi_t = [u_t \;\; y_{t-1} \;\; u_{t-1} \;\; \ldots \;\; y_{t-n} \;\; u_{t-n} \;\; 1]'$

Vektor regresních koeficientů (neznámé parametry)

$$\theta = [b_0 \;\; a_1 \;\; b_1 \;\; \ldots \;\; a_n \;\; b_n \;\; k]'$$

Pořadí veličin a parametrů $\Rightarrow$ aby platilo:

$$y_t = \psi_t'\theta + e_t = b_0 u_t + a_1 y_{t-1} + b_1 u_{t-1} + \ldots + a_n y_{t-n} + b_n u_{t-n} + k + e_t,$$

- ψ_t a θ – sloupcové vektory
- Pro skalární y_t – v rovnici násobíme $\psi_t'\theta$ nebo $\theta'\psi_t$

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \cdot \qquad \cancel{\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}$$

- Řád modelu n – největší zpoždění výstupu
- Dynamický model ($n > 0$) vs. statický model ($n = 0$)

Příklady

Dynamický regresní model 1.řádu

$$y_t = b_0 u_t + a_1 y_{t-1} + k + e_t, \qquad \psi_t = [u_t \;\; y_{t-1} \;\; 1]', \quad \theta = [b_0 \;\; a_1 \;\; k]'$$

Dynamický regresní model 2.řádu

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + e_t, \qquad \psi_t = [y_{t-1} \;\; y_{t-2}]', \qquad \theta = [a_1 \;\; a_2]'$$

Statický regresní model 0.řádu

$$y_t = b_2 u_{t-2} + b_3 u_{t-3} + k + e_t, \quad \psi_t = [u_{t-2} \;\; u_{t-3} \;\; 1]', \quad \theta = [b_2 \;\; b_3 \;\; k]'$$

Využití

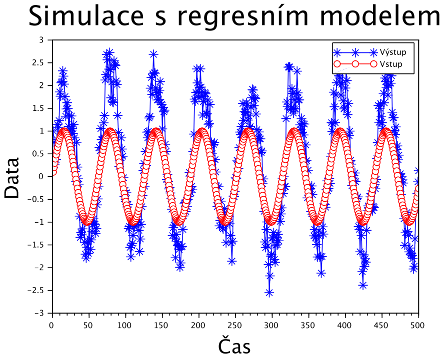
Statický model – vztah veličin (spotřeba, emise, atd.)
Dynamický – vývoj (cena, rychlost, plyn, atd.) $\Rightarrow$ předpověď

Lineární regresní model ve tvaru hp (skalární y_t) – obecně

$$f(y_t|\psi_t, \Theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \exp\{-\frac{1}{2r}(y_t - \psi_t'\theta)^2\}, \quad \text{kde} \;\; \Theta = \{\theta, r\}$$

Program – simulace regresního modelu 1.řádu

```
clear,clc,close
% vektor regr. koeficientů
theta=[1 0.6 -0.3 0.1];
r=0.1;  % rozptyl
nd=500;  % počet dat
% řídící vstup
u=sin(50*(1:nd)/nd);
% počáteční podmínky
y(1)=1;
% cyklus
for t=2:nd
    % regresní vektor
 ps=[u(t) y(t-1) u(t-1) 1];
  % generování výstupu
 y(t)=theta*ps'+sqrt(r)*randn(1,1);
end
```



Regresní model ve stavovém tvaru

Regresní model vyššího řádu $\Rightarrow$ stavový model (vždy 1.řádu)

$$x_t = Mx_{t-1} + Nu_t + \omega_t$$

x_t – stav (informace o dosavadním vývoji systému) – vektor
M, N – matice parametrů, ω_t – bílý normální šum

Příklad: $y_t = b_0 u_t + a_1 y_{t-1} + b_1 u_{t-1} + a_2 y_{t-2} + b_2 u_{t-2} + k + e_t$

$x_t = [y_t \;\; u_t \;\; y_{t-1} \;\; u_{t-1} \;\; 1]'$, $\qquad x_{t-1} = [y_{t-1} \;\; u_{t-1} \;\; y_{t-2} \;\; u_{t-2} \;\; 1]'$

Převod do stavového tvaru:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_t \\ u_t \\ y_{t-1} \\ u_{t-1} \\ 1 \end{bmatrix}}_{x_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} y_{t-1} \\ u_{t-1} \\ y_{t-2} \\ u_{t-2} \\ 1 \end{bmatrix}}_{x_{t-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{N} u_t + \underbrace{\begin{bmatrix} e_t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\omega_t}$$

- Výhoda - máme v paměti pouze jeden zpožděný stav