Přednáška 9 – Stavový model

Stav x_t – nelze měřit, modelujeme pomocí y_t a u_t

Bayesovský odhad stavu – hp (data + vývoj v čase)

Stavový model – hp

$$\underbrace{f(x_t|x_{t-1}, u_t)}_{\text{model vývoje stavu}} \sim N(Mx_{t-1} + Nu_t, R_\omega)$$

$$\underbrace{f(y_t|x_t, u_t)}_{\text{model měření výstupu}} \sim N(Ax_t + Bu_t, R_\upsilon)$$

Lineární stavový model

$$\underbrace{x_t = Mx_{t-1} + Nu_t + \omega_t}_{\text{rovnice vývoje stavu}}$$

$$\underbrace{y_t = Ax_t + Bu_t + \upsilon_t}_{\text{rovnice měření výstupu}}$$

M, N, A, B – známé parametry (matice)

ω_t – normální bílý šum vývoje stavu
(E=0, známá R_ω)

υ_t – normální bílý šum měření výstupu
(E=0, známá R_υ)

Kovarianční matice R_ω, R_υ

$$\begin{bmatrix} \text{rozptyl}_1 & \text{kovariance}_{12} \\ \text{kovariance}_{21} & \text{rozptyl}_2 \end{bmatrix}$$

Důležité předpoklady

Lineární stavový model, známé parametry, normální rozdělení

Bayesovské odhadování stavu (filtrace)

Cíl – online odhad stavu v čase t (rekurze)

$$\underbrace{f(x_{t-1}|d(t-1))}_{\text{apriorní hp}} \Rightarrow \underbrace{f(x_t|d(t))}_{\text{aposteriorní hp}}$$

- x_{t-1} – počáteční stav
- $d(t-1)$ – stará data
- přirozené podmínky řízení

1.krok – Predikce stavu

$$f\left(x_t|d(t-1)\right) = \int_{x^*} \underbrace{f\left(x_t|x_{t-1},u_t\right)}_{\text{model}} \underbrace{f\left(x_{t-1}|d(t-1)\right)}_{\text{apriorní hp}} dx_{t-1}$$

- Sdružená hp
- Integrál

Časový posun: $f\left(x_{t-1}|d(t-1)\right) \Rightarrow f\left(x_t|d(t-1)\right)$

2.krok – Filtrace stavu

$$f\left(x_t|d\left(t\right)\right) \propto \underbrace{f\left(y_t|x_t,u_t\right)}_{\text{model}} \underbrace{f\left(x_t|d\left(t-1\right)\right)}_{\text{predikce}}$$

- Bayesovo pravidlo

Datový posun: $f\left(x_t|d(t-1)\right) \Rightarrow f\left(x_t|d(t)\right)$

Výsledek: aposteriorní hp stavu s normálním rozdělením v čase t

V praxi – přepočet středních hodnot a kovariančních matic

Označení: $\hat{x}_{t-1|t-1}$ – počáteční střední hodnota stavu
$R_{t-1|t-1}$ – počáteční kovarianční matice stavu

Kalmanův filtr – rekurze

Predikce stavu

Střední hodnota $\hat{x}_{t|t-1} = M\hat{x}_{t-1|t-1} + Nu_t$

Kovarianční matice $R_{t|t-1} = R_\omega + MR_{t-1|t-1}M'$

Filtrace stavu

Střední hodnota predikce výstupu $\hat{y}_t = A\hat{x}_{t|t-1} + Bu_t$

Kovarianční matice predikce výstupu $R_y = R_\upsilon + AR_{t|t-1}A'$

Kovarianční matice stavu $R_{t|t} = R_{t|t-1} - R_{t|t-1}A'R_y^{-1}AR_{t|t-1}$

Kalmanův gain $K_g = R_{t|t}A'R_\upsilon^{-1}$

Střední hodnota stavu $\hat{x}_{t|t} = \hat{x}_{t|t-1} + K_g\left(y_t - \hat{y}_t\right)$

- K_g – přesnost odhadu, vztah x_t a y_t, šum, chyba predikce
- Výsledek: aposteriorní hp $f\left(x_t|d\left(t\right)\right) \sim N(\hat{x}_{t|t}, R_{t|t})$

Program – funkce Kalman.m

```
function [xt,Rx,yp]=Kalman(xt,yt,ut,M,N,A,B,Rw,Rv,Rx)
  % predikce stavu
  xt=M*xt+N*ut; % střední hodnota stavu
  Rx=Rw+M*Rx*M'; % kovarianční matice stavu
  % filtrace stavu
  yp=A*xt+B*ut; % střední hodnota predikce výstupu
  Ry=Rv+A*Rx*A'; % kovarianční matice predikce výstupu
  Rx=Rx-Rx*A'*inv(Ry)*A*Rx; % kovarianční matice stavu
  ey=yt-yp; % chyba predikce
  KG=Rx*A'*inv(Rv); % Kalmanův gain
  xt=xt+KG*ey; % střední hodnota stavu
end
```

Vliv

- Nastavení $\hat{x}_{0|0}$ (expertní znalosti)
- Nastavení $R_{0|0}$
- R_ω, R_υ – šumy (vývoj stavu, měření výstupu)

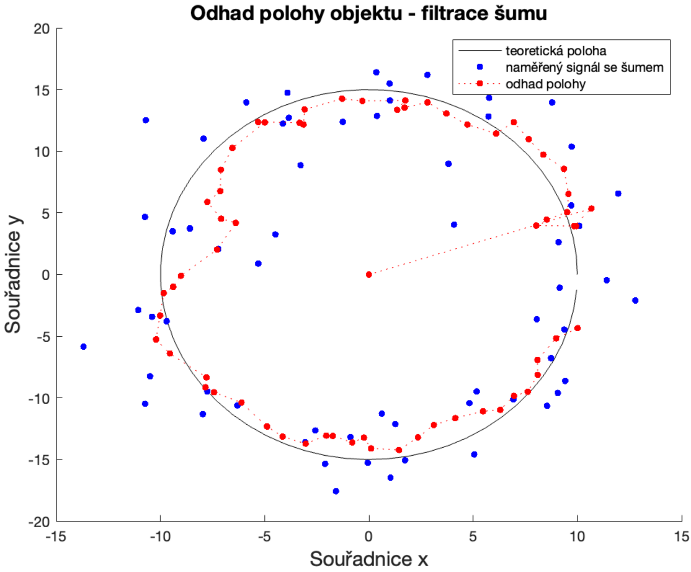
Využití Kalmanova filtru v praxi

- Navigační systémy
- Sledování objektů
- Satelity, radary atd

Zdroj: www.bezpecnecesty.cz

Příklad – Odhad polohy objektu s filtrací šumu

y_t – naměřený signál se šumem $\qquad$ x_t – filtrovaný signál (odhad)



Program

```
clear,clc,close
% simulace
tt=0:.1:(2*%pi); nd=length(tt);
sd=2;
e=[sd*randn(1,nd); sd*randn(1,nd)]; % šum
g=[10*cos(tt); 15*sin(tt)]; % teoretická poloha objektu
y=g+e; % naměřený signál se šumem

% Kalmanův filtr pro filtraci šumu
Rx=1e6*eye(2,2); % počáteční kovarianční matice stavu
Rw=.01*eye(2,2); % kovarianční matice vývoje stavu
Rv=.1*eye(2,2); % kovarianční matice měření výstupu
M=[1 0; 0 1]; % parametry
A=[1 0; 0 1]; N=[0 0]'; B=0;
x(:,1)=[0 0]'; % počáteční střední hodnota stavu
for t=2:nd
[x(:,t),Rx,yp]=Kalman(x(:,t-1),y(:,t),0,M,N,A,B,Rw,Rv,Rx);
end
```

Nelineární případ

Rozšířený Kalmanův filtr

- Nelineární stavový model
- Neznámé parametry se přidají do x_t $\rightarrow$ nový stav $\rightarrow$ nelineární stavový model
- Linearizace – první dva členy Taylorovy řady
- Dále – lineární Kalmanův filtr