O Brownově pavučině a síti

Jan M. Swart

Konference českých matematiků, 4. dubnu 2022, Ostrava.

Centrálni limitní věta

Nechť je $(X_k)_{k\geq 1}$ posloupnost nezávislých, stejně rozdělených reálných náhodných proměnných se střední hodnotou $\mathbb{E}[X_k] = 0$, jejichž variance $\sigma^2 := \mathbb{E}[X_k^2]$ plní $0 < \sigma^2 < \infty$. Definujeme

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k \qquad (n \geq 0).$$

Potom

$$\mathbb{P}\big[\tfrac{1}{\sqrt{\sigma^2 n}} S_n \in \cdot\,\big] \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \mathbb{P}\big[N \in \cdot\,\big],$$

kde $\Rightarrow$ značí slabou konvergenci pravděpodobnostních rozdělení a N je standardní normálně rozdělená náhodná proměnná.

Donskerův princip invariance

Náhodná funce $n \mapsto S_n$ je *náhodná procházka*.
Pro každé $\varepsilon > 0$, nechť je

$$S_t^\varepsilon := \varepsilon \frac{1}{\sigma} S_{\lfloor t/\varepsilon^2 \rfloor} \qquad (t \geq 0).$$

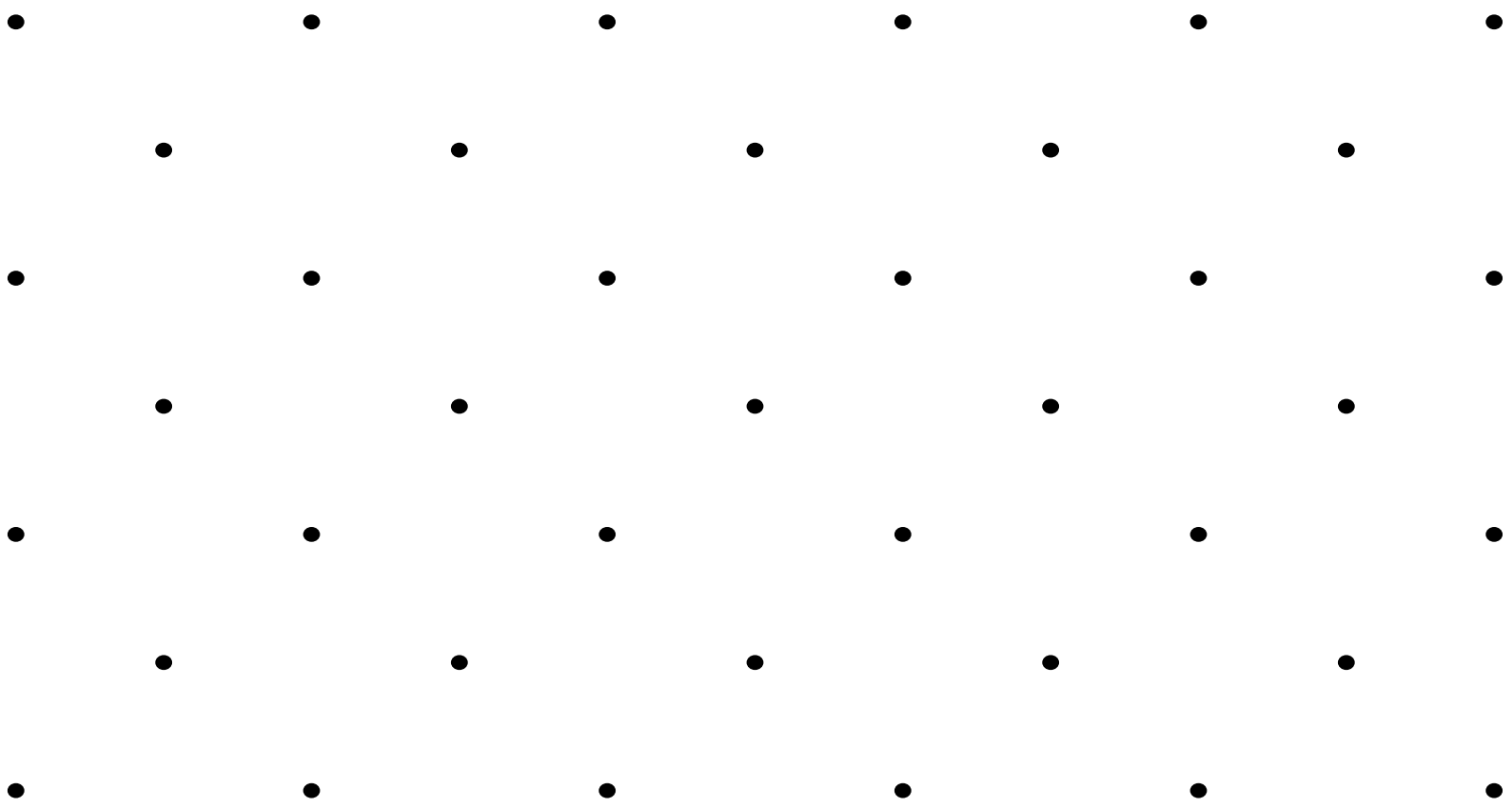
Potom

$$\mathbb{P}\big[(S_t^\varepsilon)_{t\geq 0} \in \cdot\,\big] \underset{\varepsilon\to 0}{\Longrightarrow} \mathbb{P}\big[(B_t)_{t\geq 0} \in \cdot\,\big],$$

kde $\Rightarrow$ značí slabou konvergenci pravděpodobnostních rozdělení na vhodném[1] prostoru funkcí, a $(B_t)_{t\geq 0}$ je *Brownův pohyb* (*Wienerův proces*).

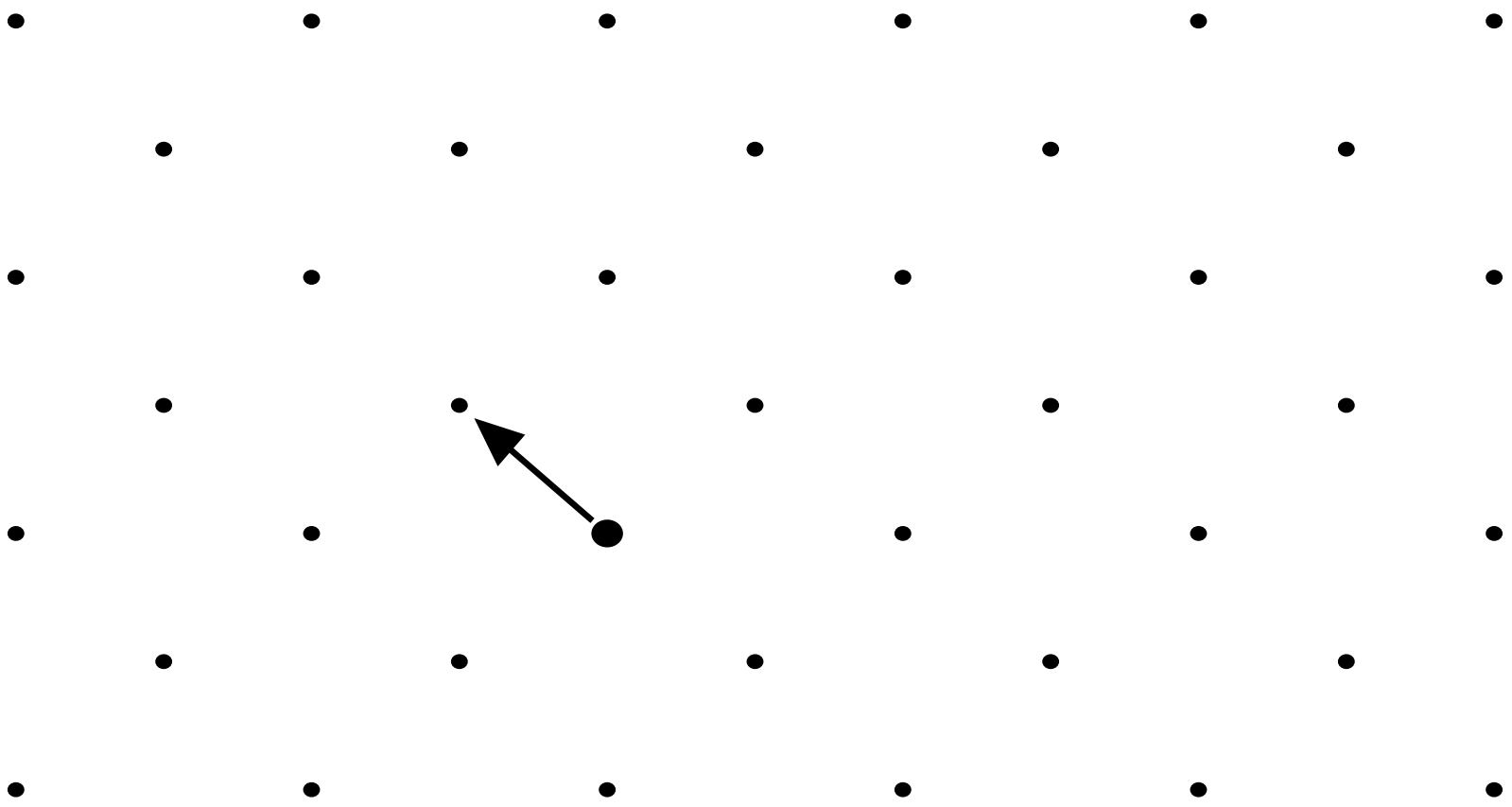
[1] K tomu se dostaneme.

Sudá mřížka



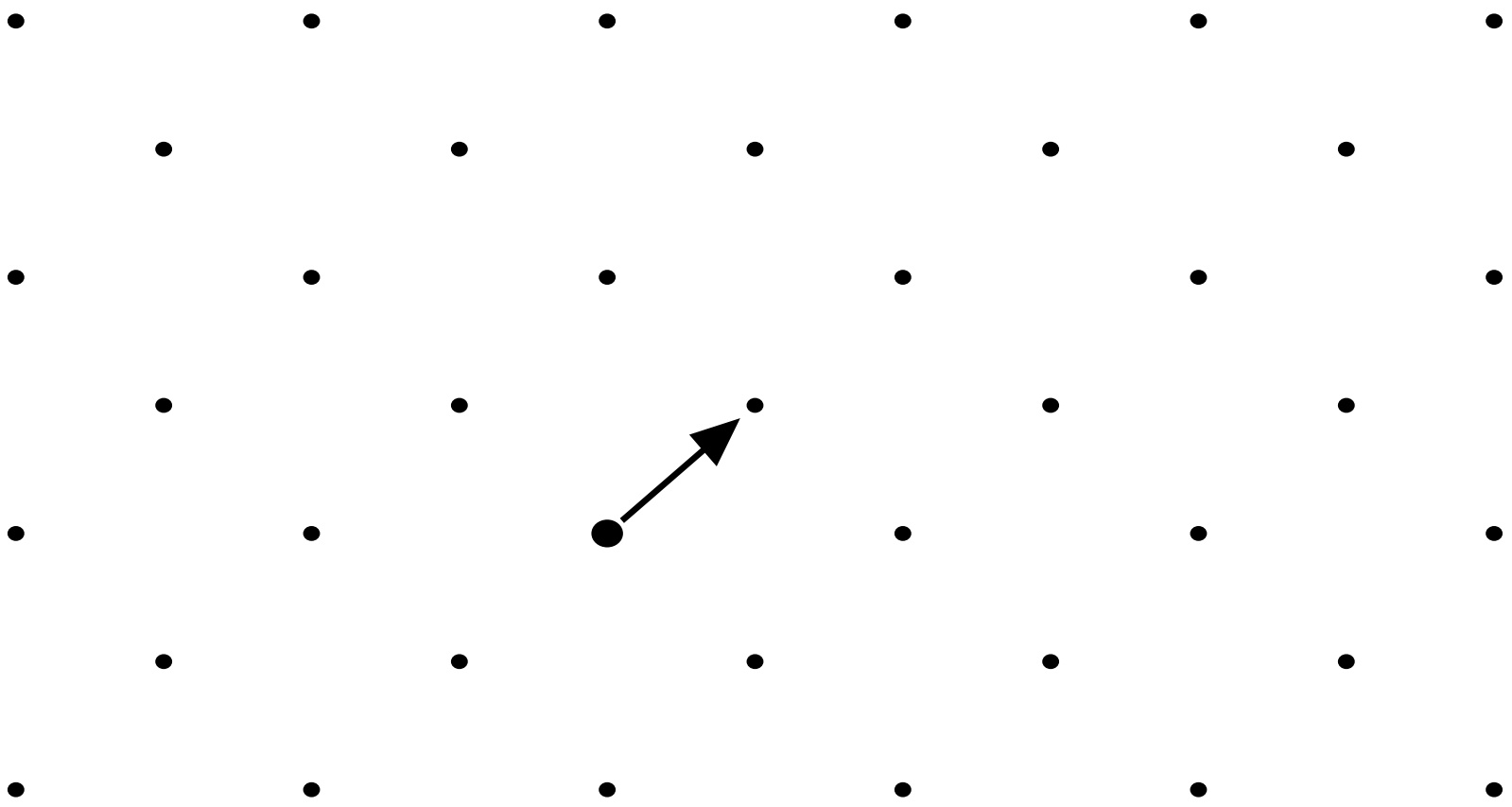
$$\mathbb{Z}^2_{\text{sud}} := \{(x,t) \in \mathbb{Z}^2 : x + t \text{ je sudé}\}.$$

Konfigurace šipek



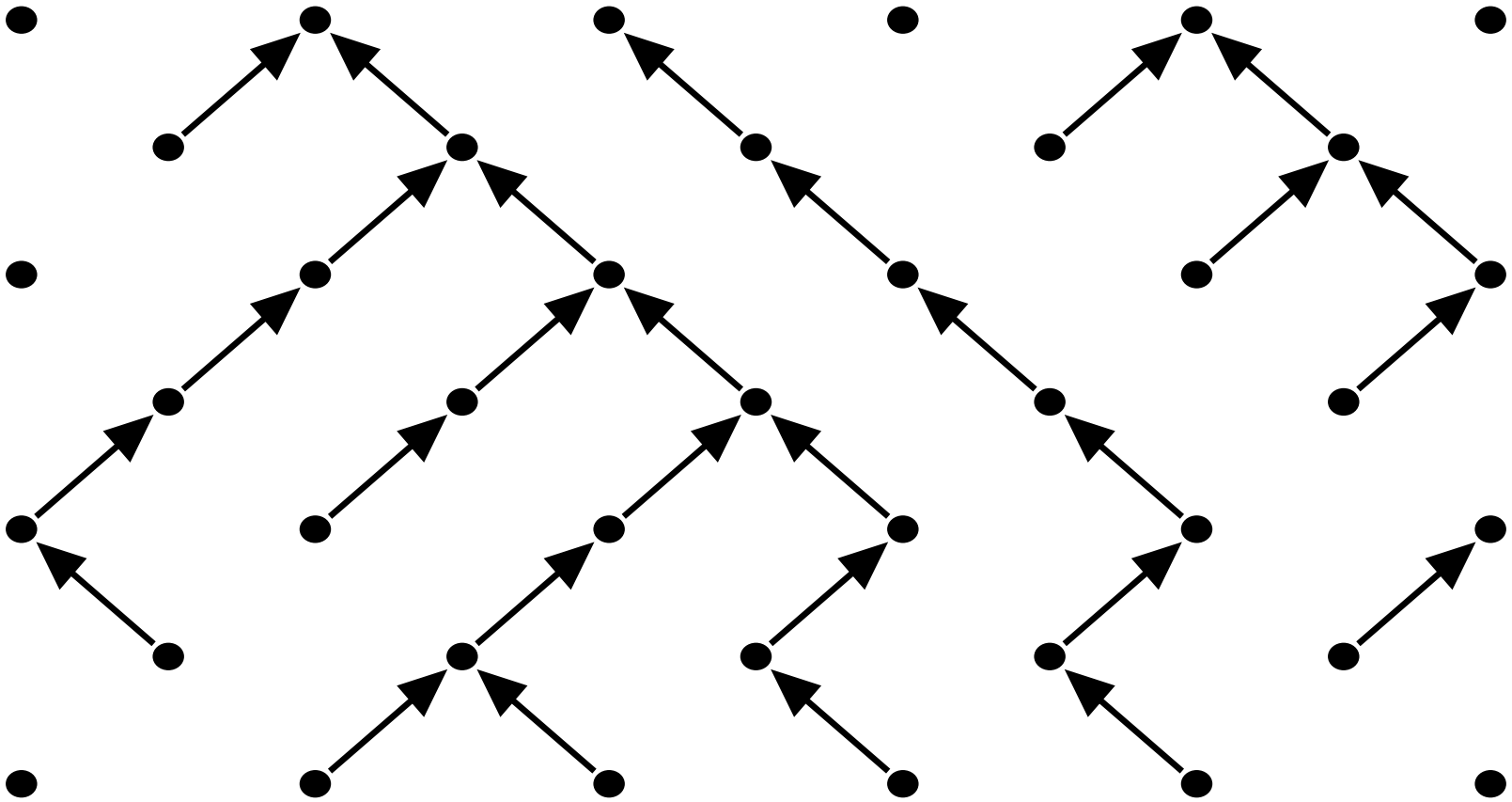
S pravděpodobností $\frac{1}{2}$ nakreslíme šipku doleva.

Konfigurace šipek



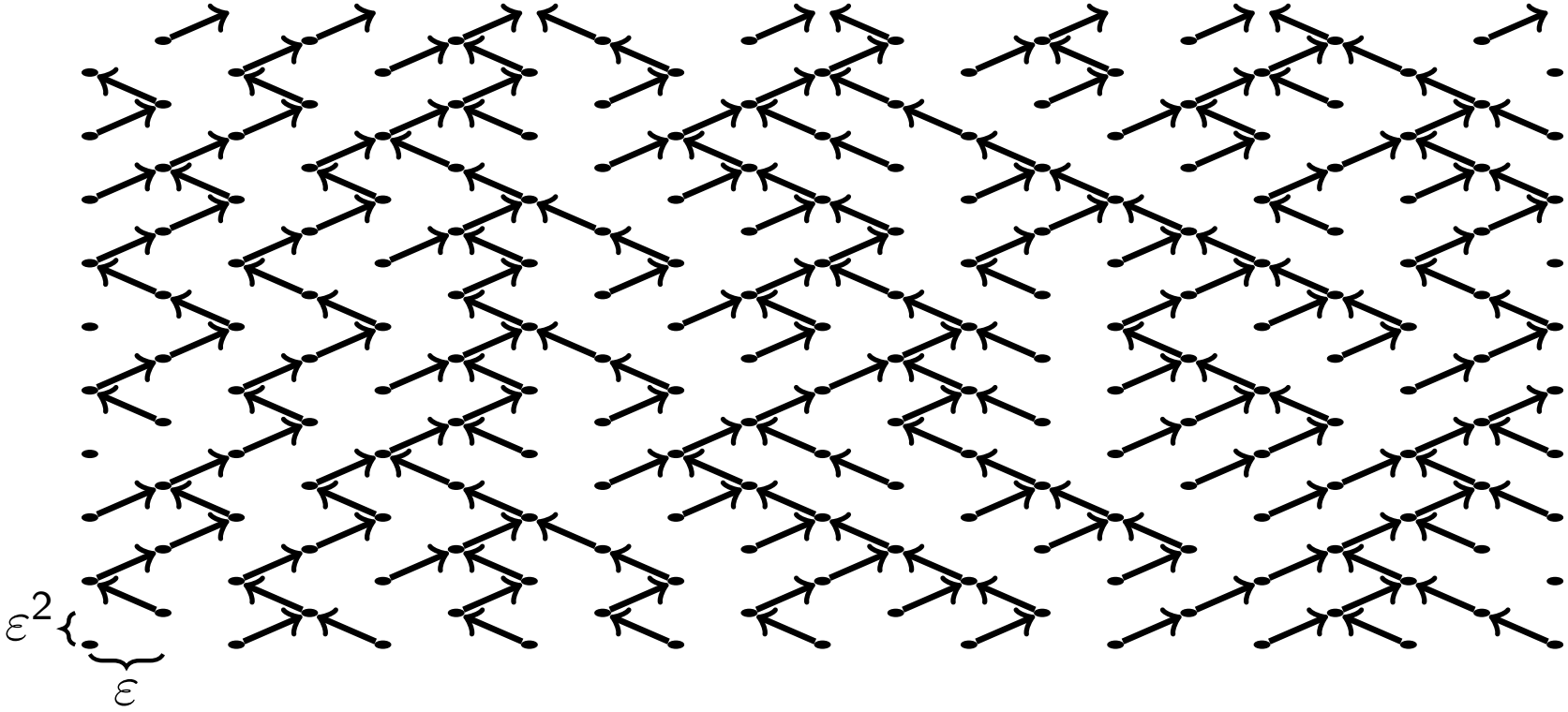
S pravděpodobností $\frac{1}{2}$ nakreslíme šipku doprava.

Konfigurace šipek



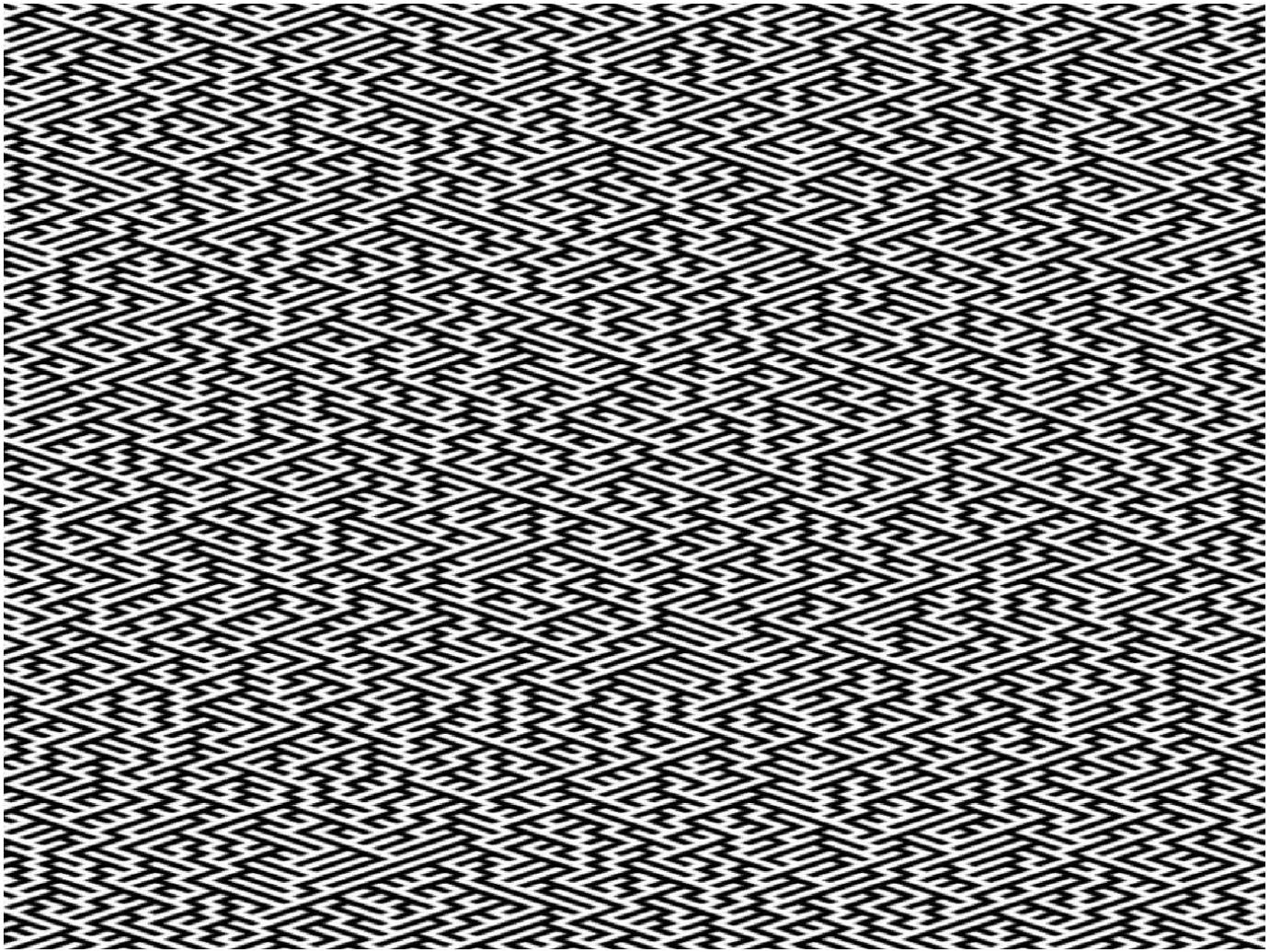
Nezávisle pro každý bod v mřížce.

Skálovací limita



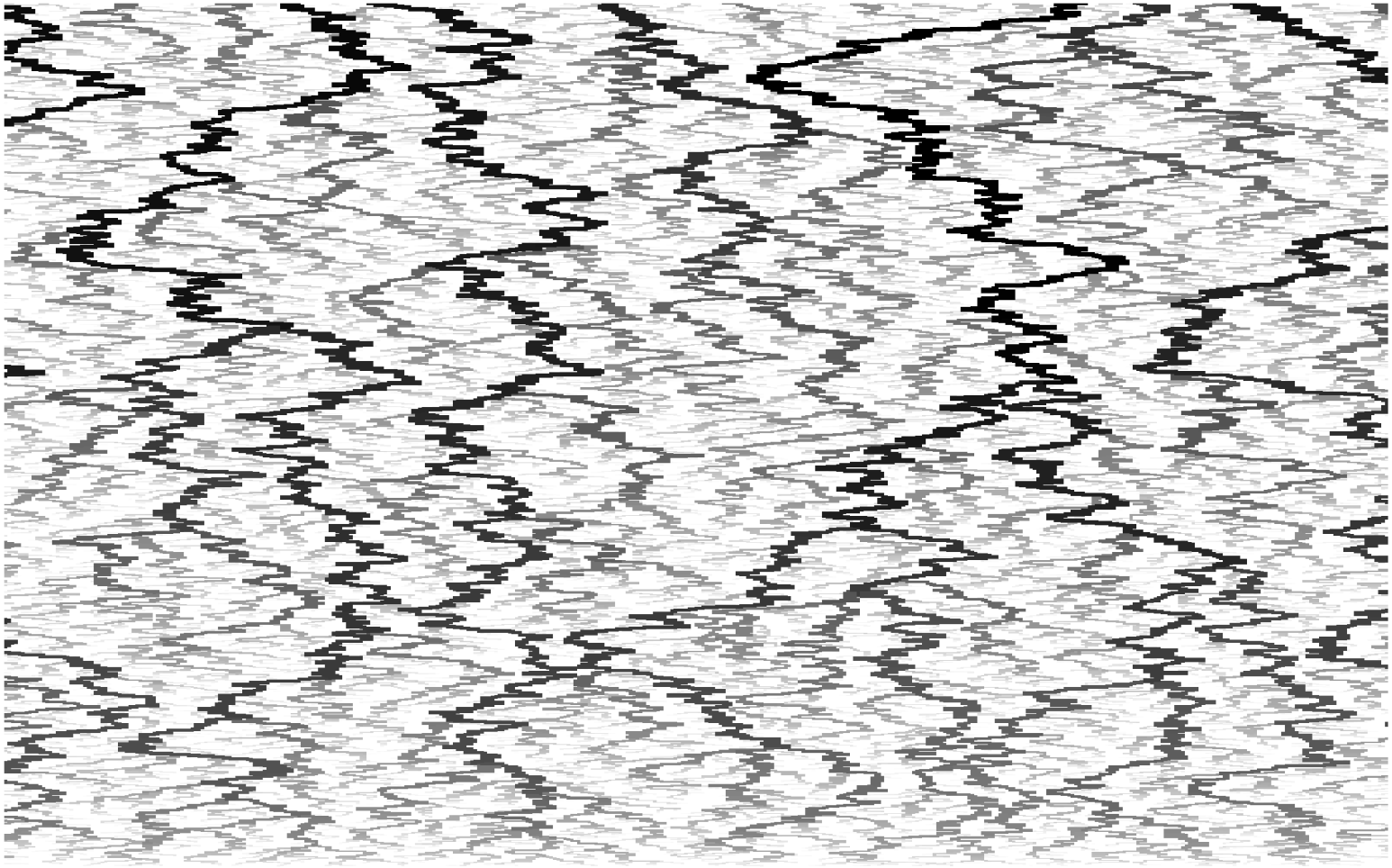
Všechny vzdáleností v prostoru násobíme ε
a všechny časové úseky násobíme ε^2.

Skálovací limita



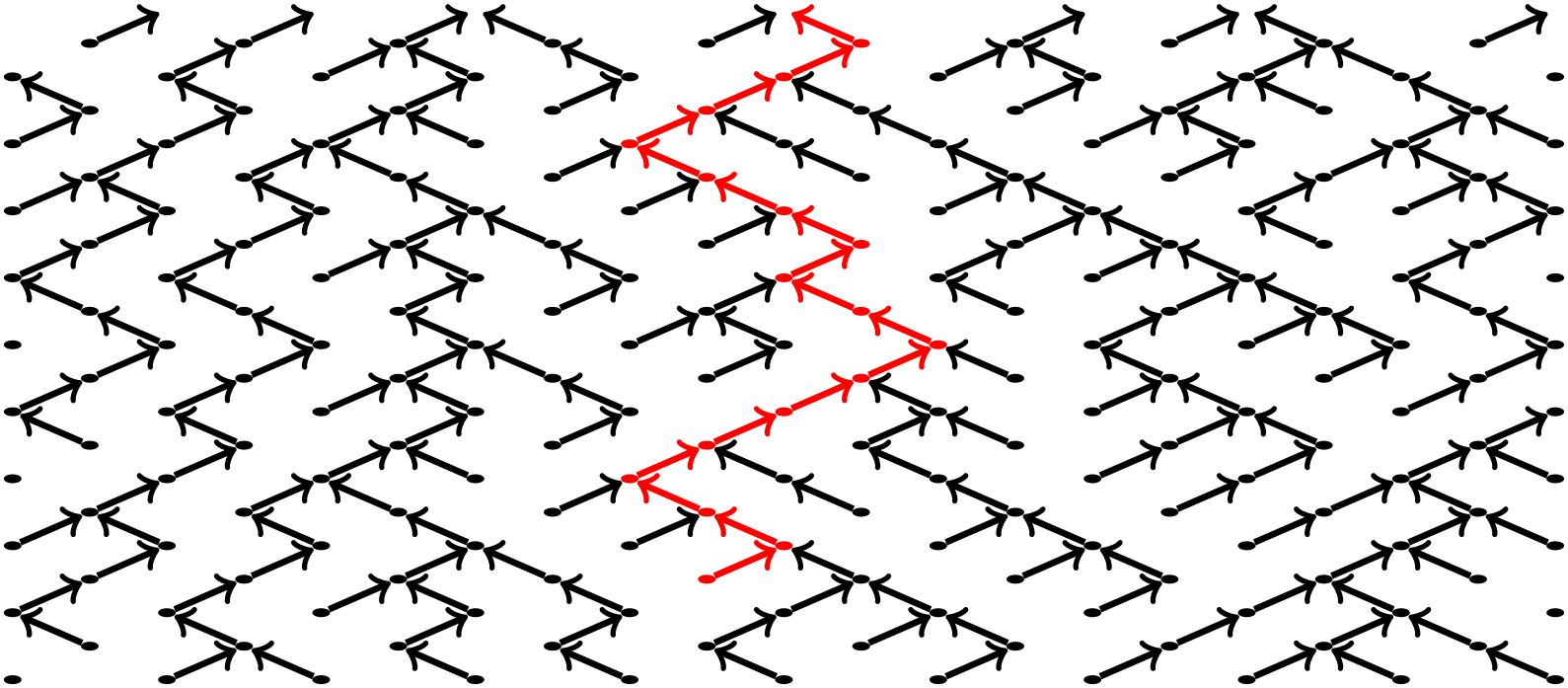
Našim cílem je dokázat, že existuje limita pro $\varepsilon \to 0$.

Skálovací limita



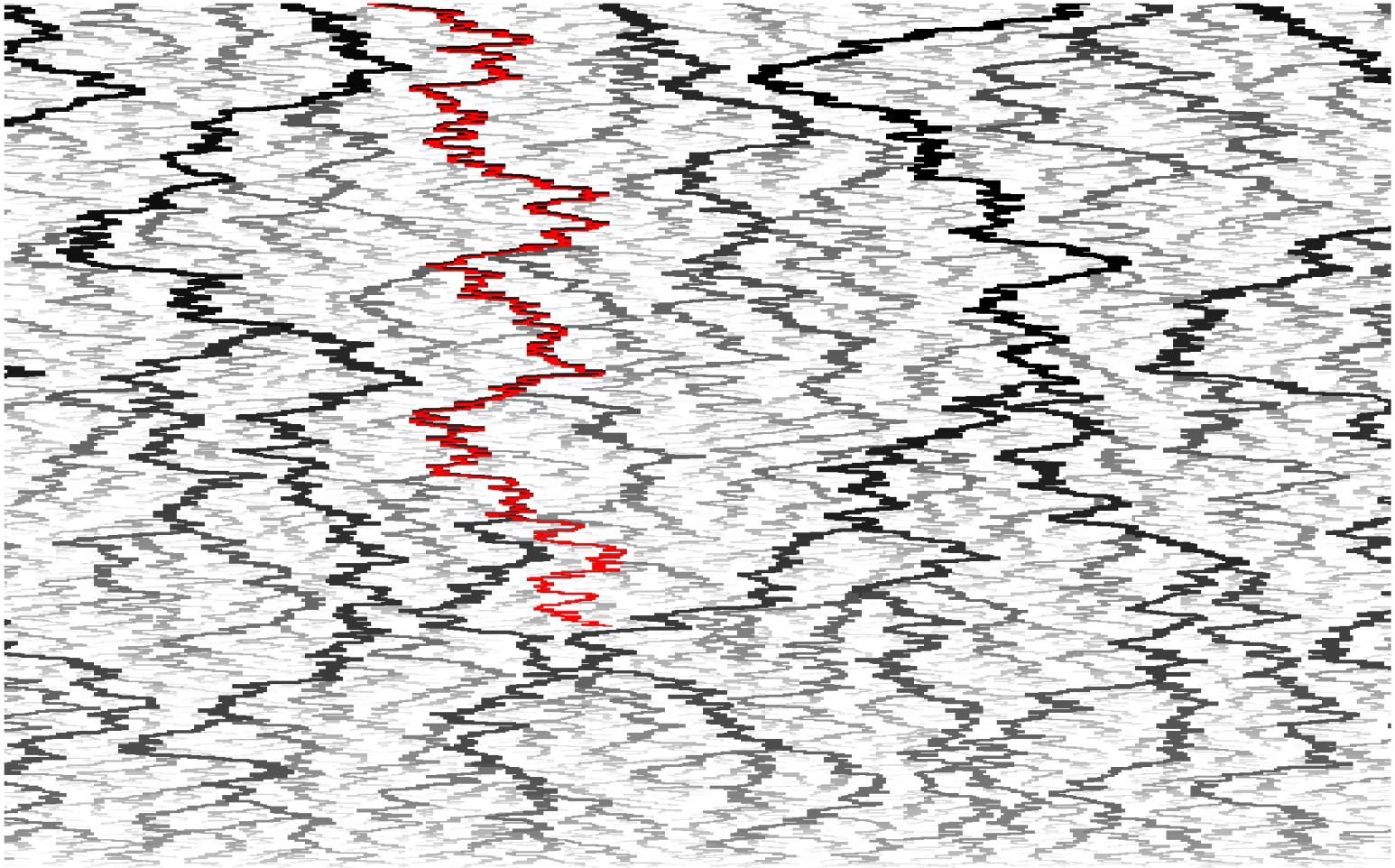
Našim cílem je dokázat, že existuje limita pro $\varepsilon \to 0$.

Trajektorie



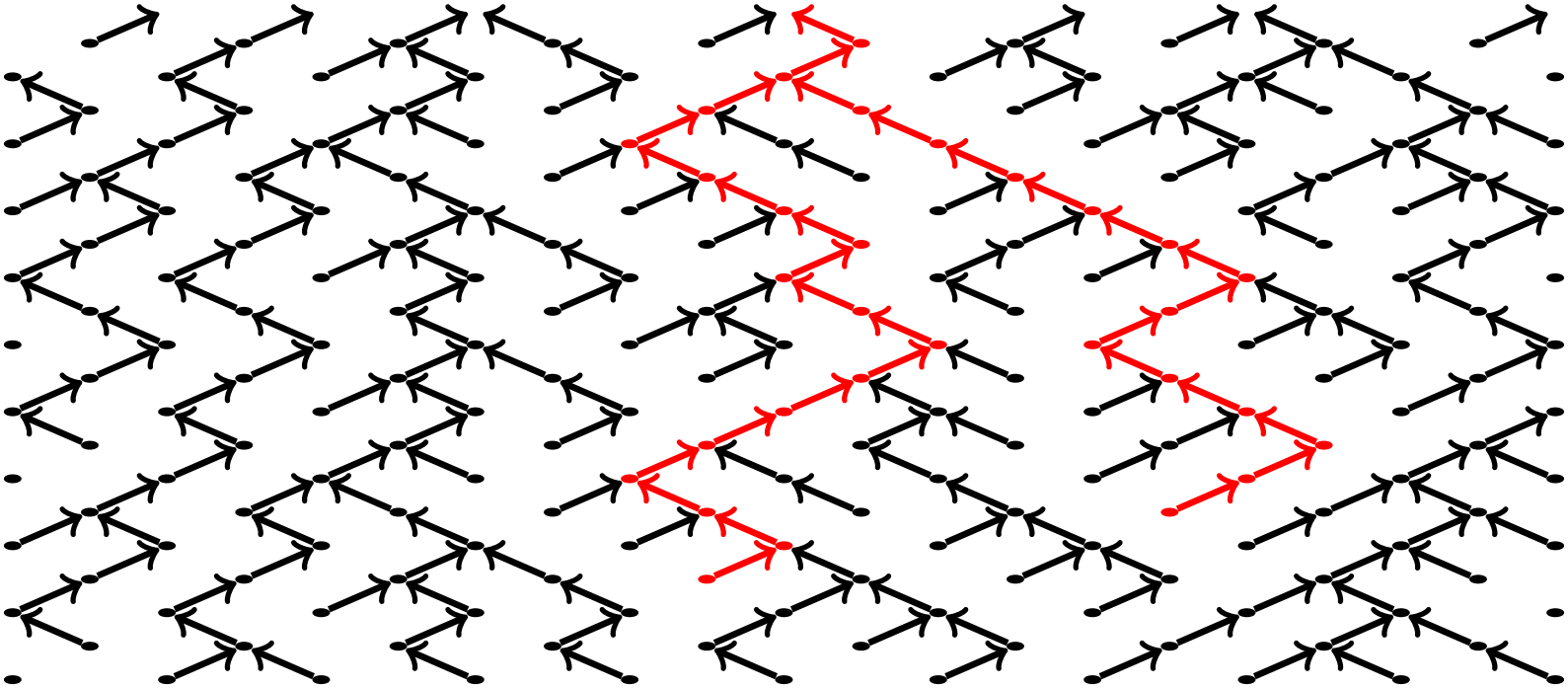
V každém bodě začíná náhodná procházka.

Trajektorie



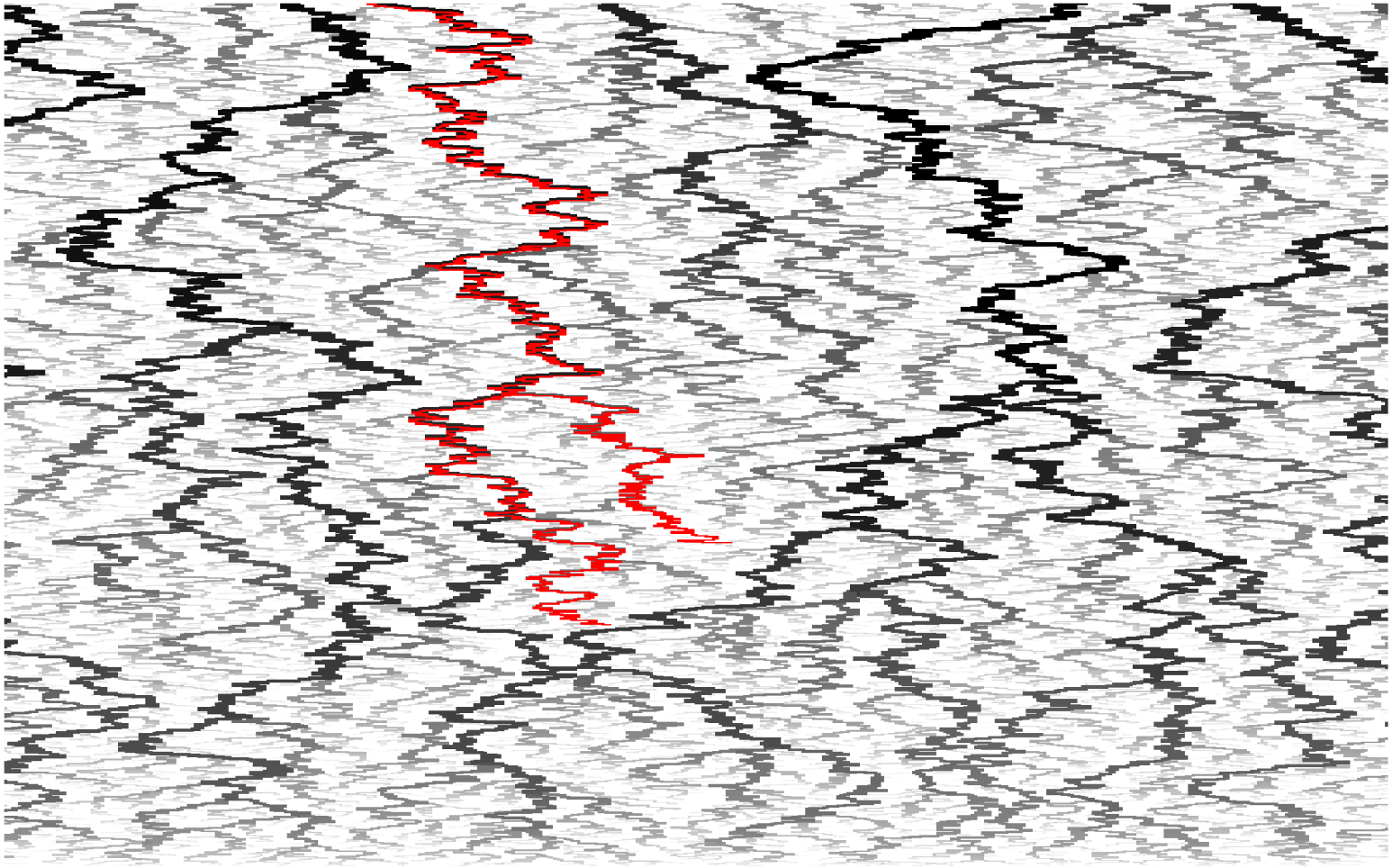
V limitě taková náhodná procházka konverguje k Brownovému pohybu.

Trajektorie



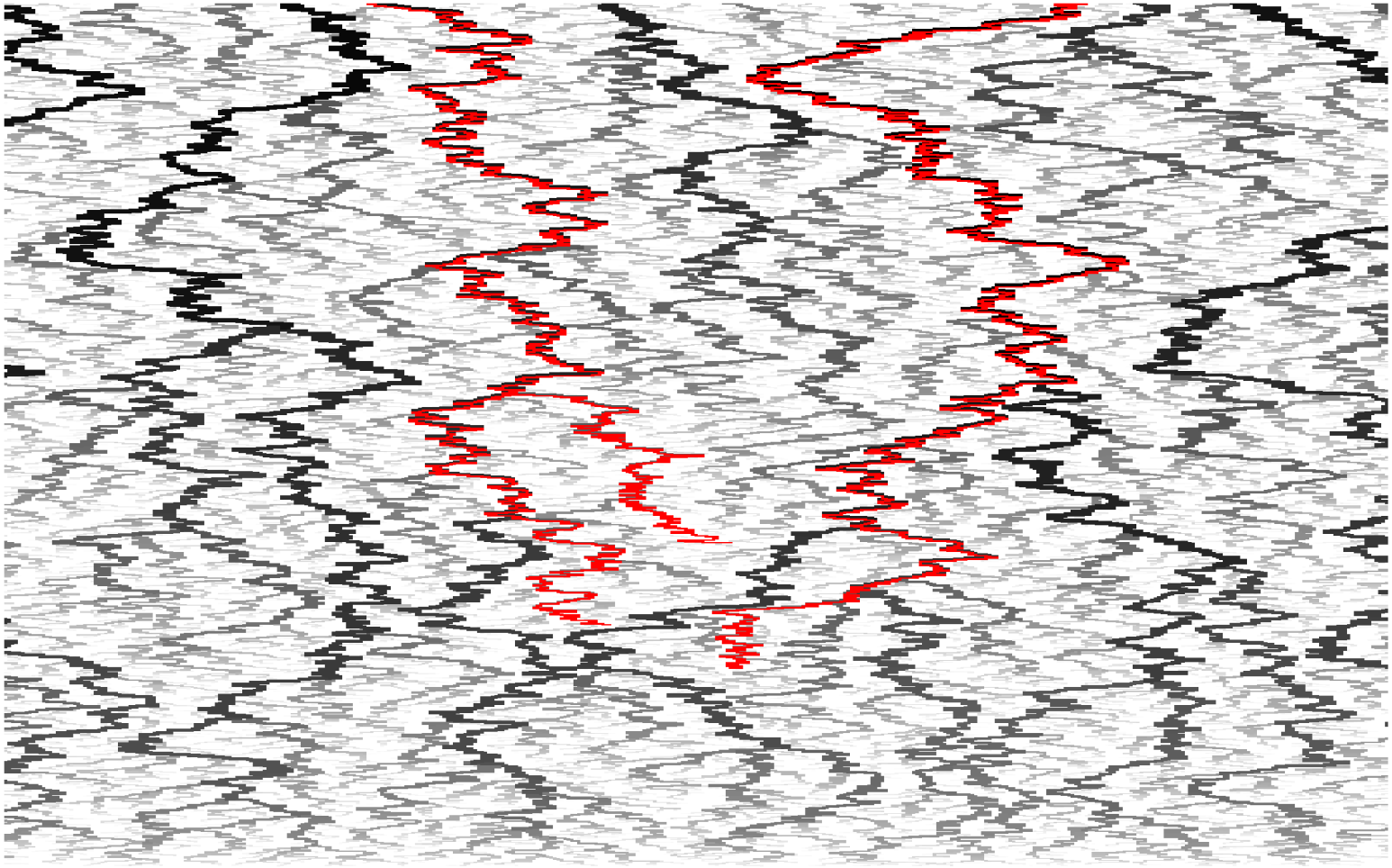
Náhodné procházky, které začínají v různých bodech, *splývají*.

Trajektorie



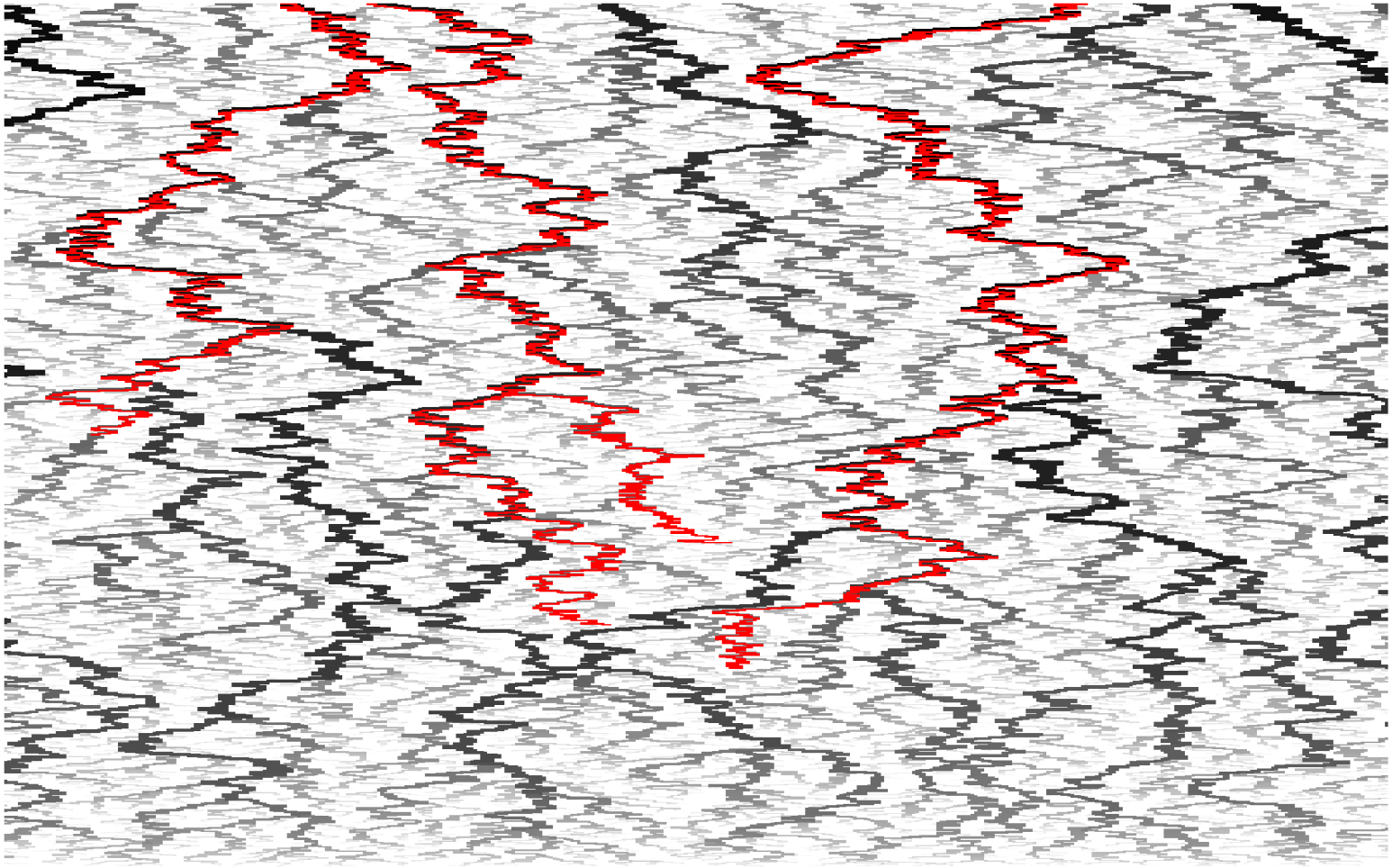
V limitě dostaneme *splývající Brownovy pohyby*.

Trajektorie



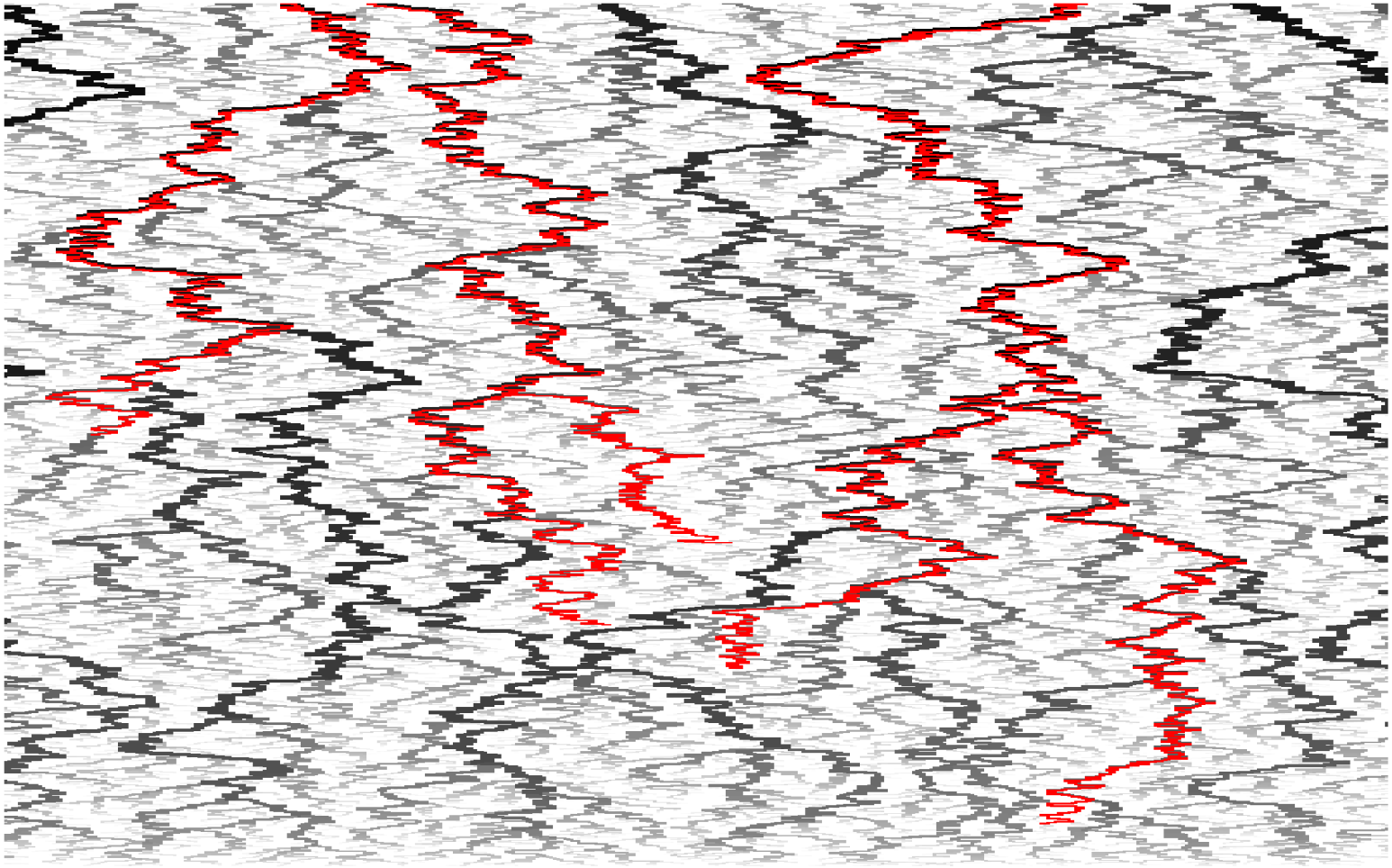
V limitě dostaneme *splývající Brownovy pohyby*.

Trajektorie



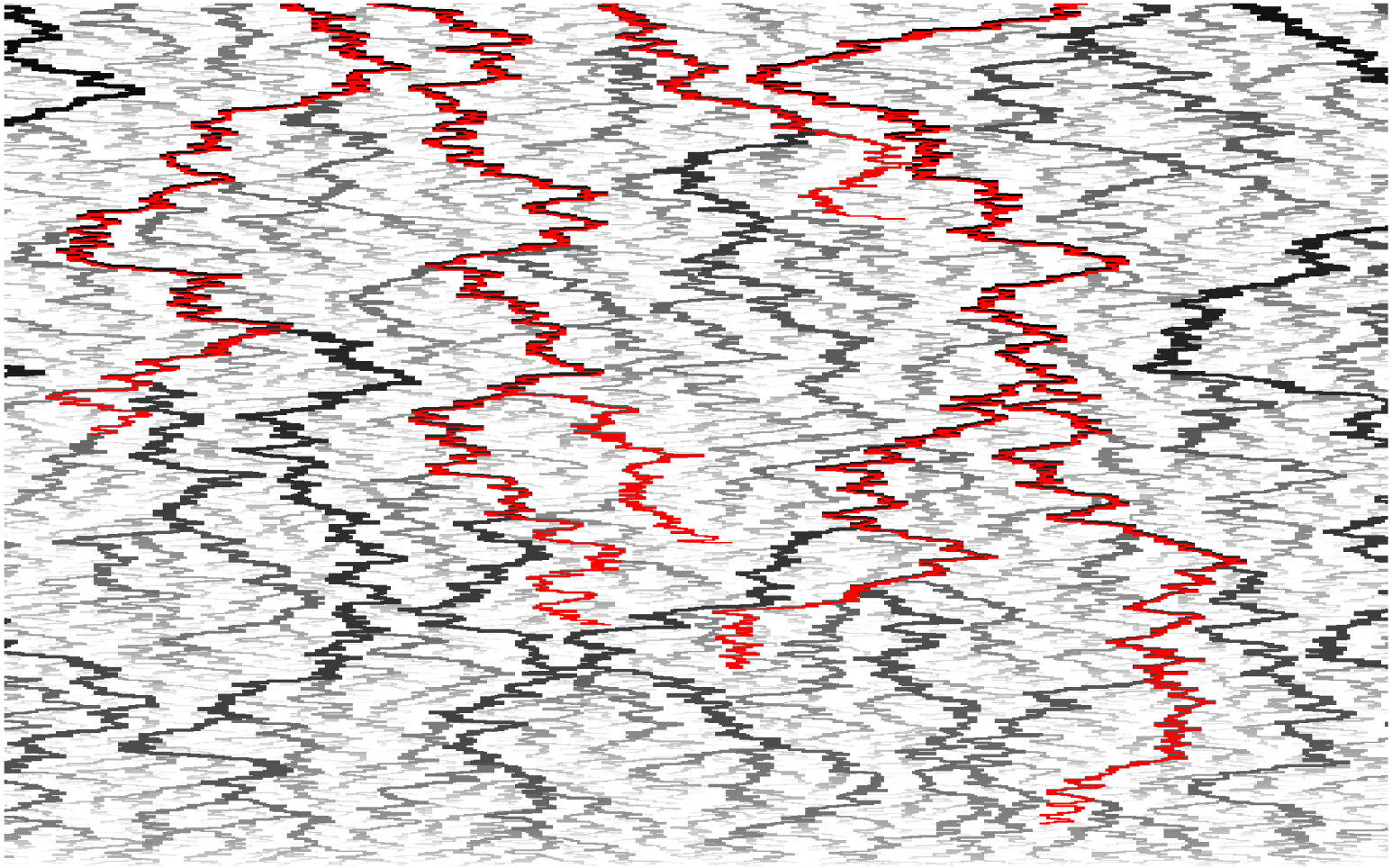
V limitě dostaneme *splývající Brownovy pohyby*.

Trajektorie



V limitě dostaneme *splývající Brownovy pohyby*.

Trajektorie



V limitě dostaneme *splývající Brownovy pohyby*.

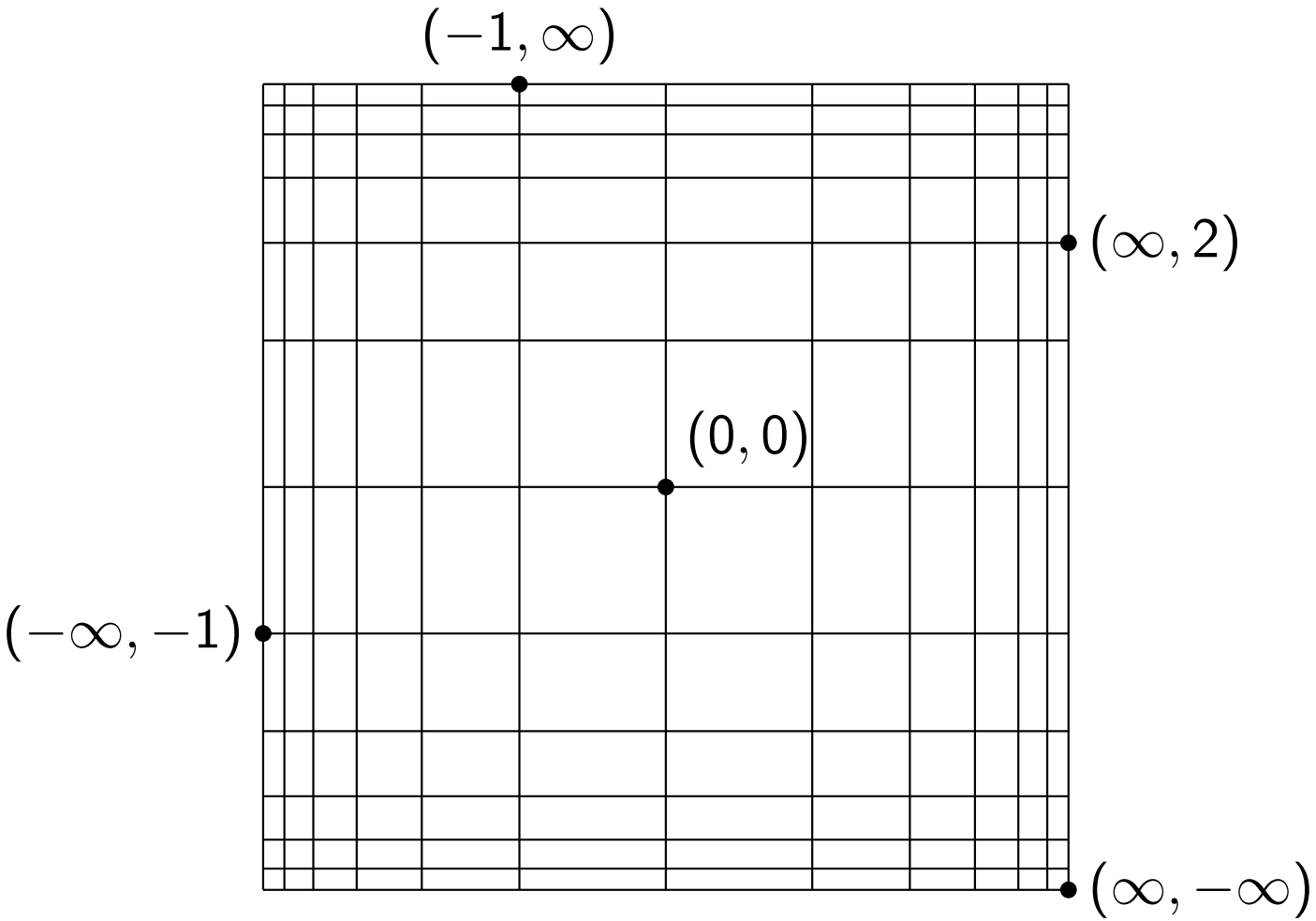
Brownova síť

Naším cílem je definovat objekt, který odpovídá neformálnímu popisu:

> *Splývající Brownovy pohyby, které začínají v každém bodě časoprostoru.*

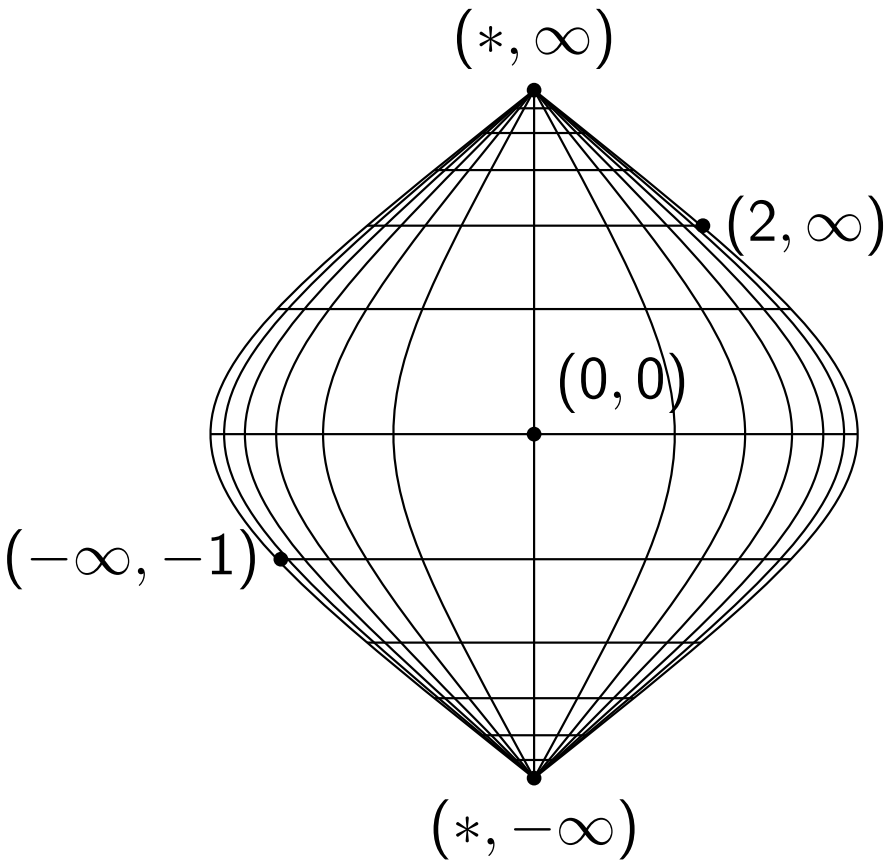
Navíc chceme dokázat, že konfigurace šipek, po skálování ε, konvergují k Brownově síti.
Nejdříve potřebujeme definovat správný způsob konvergence.

Topologické definice



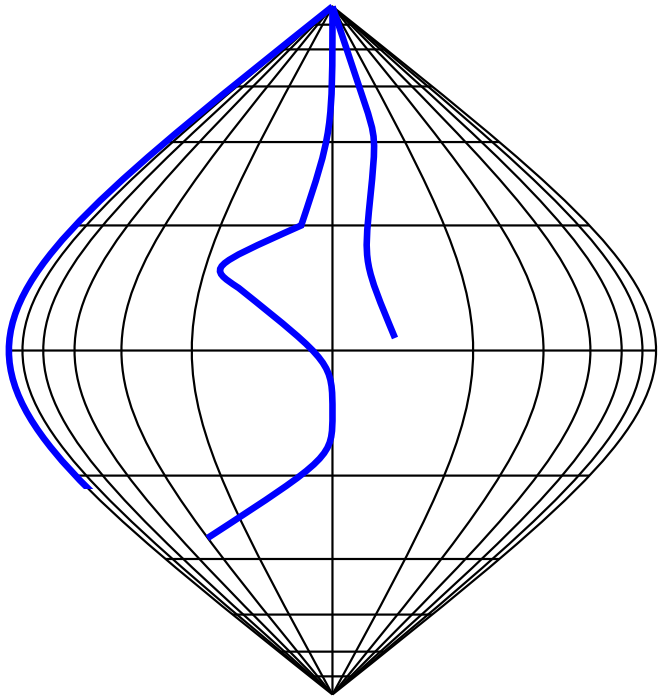
Nejdříve kompaktujeme prostor a čas tím, že nahradíme $\mathbb{R}$ kompaktní reální osou $[-\infty, \infty]$...

Topologické definice



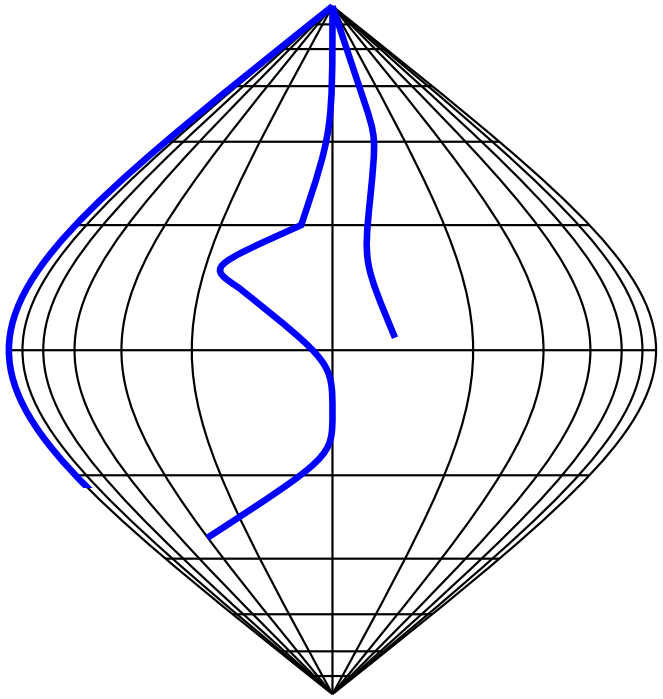
...potom stáhneme množiny $[-\infty, \infty] \times \{-\infty\}$ a $[-\infty, \infty] \times \{\infty\}$ každou do jednoho bodu.

Topologické definice



Trajektorie je spojitá funkce $\pi : [\sigma_\pi, \infty) \to [-\infty, \infty]$,
kde $\sigma_\pi \in \mathbb{R}$ značí *počáteční čas*.

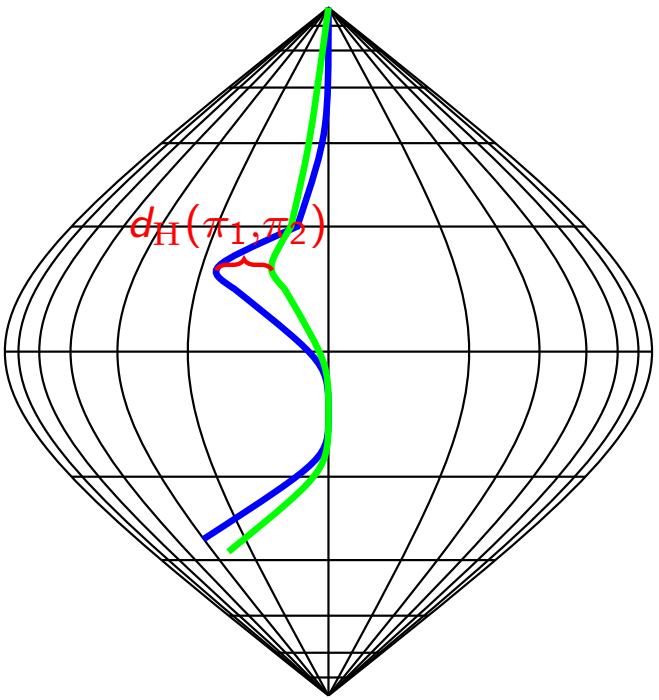
Topologické definice



Trajektorii π ztotožníme s jejím grafem

$$\{(\pi(t), t) : t \in [\sigma_\pi, \infty)\} \cup \{(*, \infty)\}.$$

Topologické definice

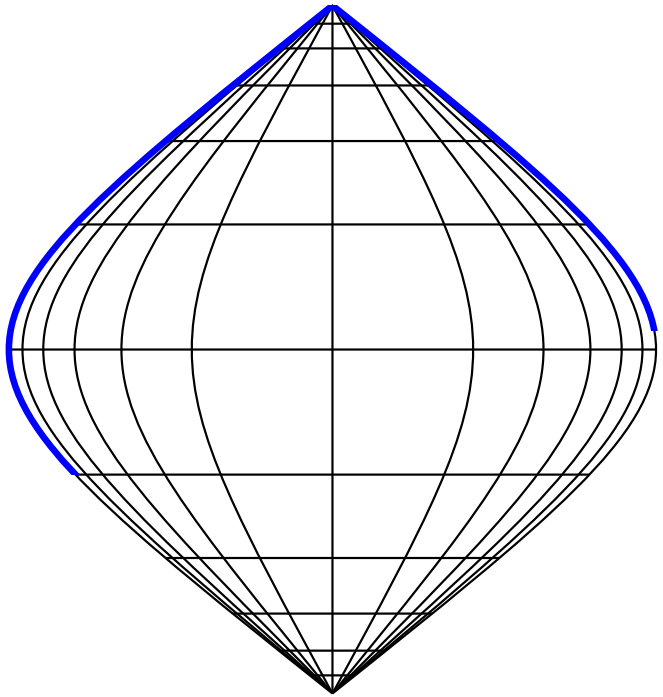


Opatříme prostor Π všech trajektorií *Hausdorffovou metrikou*

$$d_{\mathrm{H}}(\pi_1,\pi_2) := \sup_{z_1\in\pi_1} \inf_{z_2\in\pi_2} d(z_1,z_2) \vee \sup_{z_2\in\pi_2} \inf_{z_1\in\pi_1} d(z_1,z_2),$$

kde d značí metriku na kompaktovaném časoprostoru.

Topologické definice



Pokud přídáme trivální trajektorie, které jsou konstantně $-\infty$ nebo $+\infty$, stane se prostor všech trajektorií v konfigurace šipek kompaktní podmnožinou prostoru Π.

Topologické definice

Prostor $\mathcal{K}(\Pi)$ všech kompaktních podmnožin prostoru trajektorií Π znovu opatříme Hausdorffovou metrikou:

$$d_{\mathrm{HH}}(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2) := \sup_{\pi_1 \in \mathcal{U}_1} \inf_{\pi_2 \in \mathcal{U}_2} d_{\mathrm{H}}(\pi_1, \pi_2) \vee \sup_{\pi_2 \in \mathcal{U}_2} \inf_{\pi_1 \in \mathcal{U}_1} d_{\mathrm{H}}(\pi_1, \pi_2),$$

kde d_{H} značí metriku na Π.

Definujme difusní skálovací zobrazení θ_ε

$$\theta_\varepsilon(x, t) := (\varepsilon x, \varepsilon^2 t),$$

a položme

$$\theta_\varepsilon(\pi) := \{\theta_\varepsilon(x, t) : (x, t) \in \pi\} \qquad \theta_\varepsilon(\mathcal{U}) := \{\theta_\varepsilon(\pi) : \pi \in \mathcal{U}\}.$$

Konvergence k Brownově pavučině

Věta [Fontes, Isopi, Newman, Ravishankar (2003)] Nechť je $\mathcal{U}$ náhodná množina všech trajektorií v konfiguraci šipek. Potom

$$\mathbb{P}[\theta_\varepsilon(\mathcal{U}) \in \cdot\,] \underset{\varepsilon\to 0}{\Longrightarrow} \mathbb{P}[\mathcal{W} \in \cdot\,],$$

kde $\Rightarrow$ značí slabou konvergenci pravděpodobnostních měr na prostoru $\mathcal{K}(\Pi)$ a limitní náhodná kompaktní množina trajektorií $\mathcal{W}$ se jmenuje *Brownova pavučina* (Brownian web).

Brownova pavučina

Brownova pavučina $\mathcal{W}$ je kompaktní podmnožina prostoru trajektorií Π s následující definicí:

- V každém daném, deterministickém bodě $z \in \mathbb{R}^2$ začíná skoro jistě přesně jedna trajektorie $p_z \in \mathcal{W}$.

Brownova pavučina

Brownova pavučina $\mathcal{W}$ je kompaktní podmnožina prostoru trajektorií Π s následující definicí:

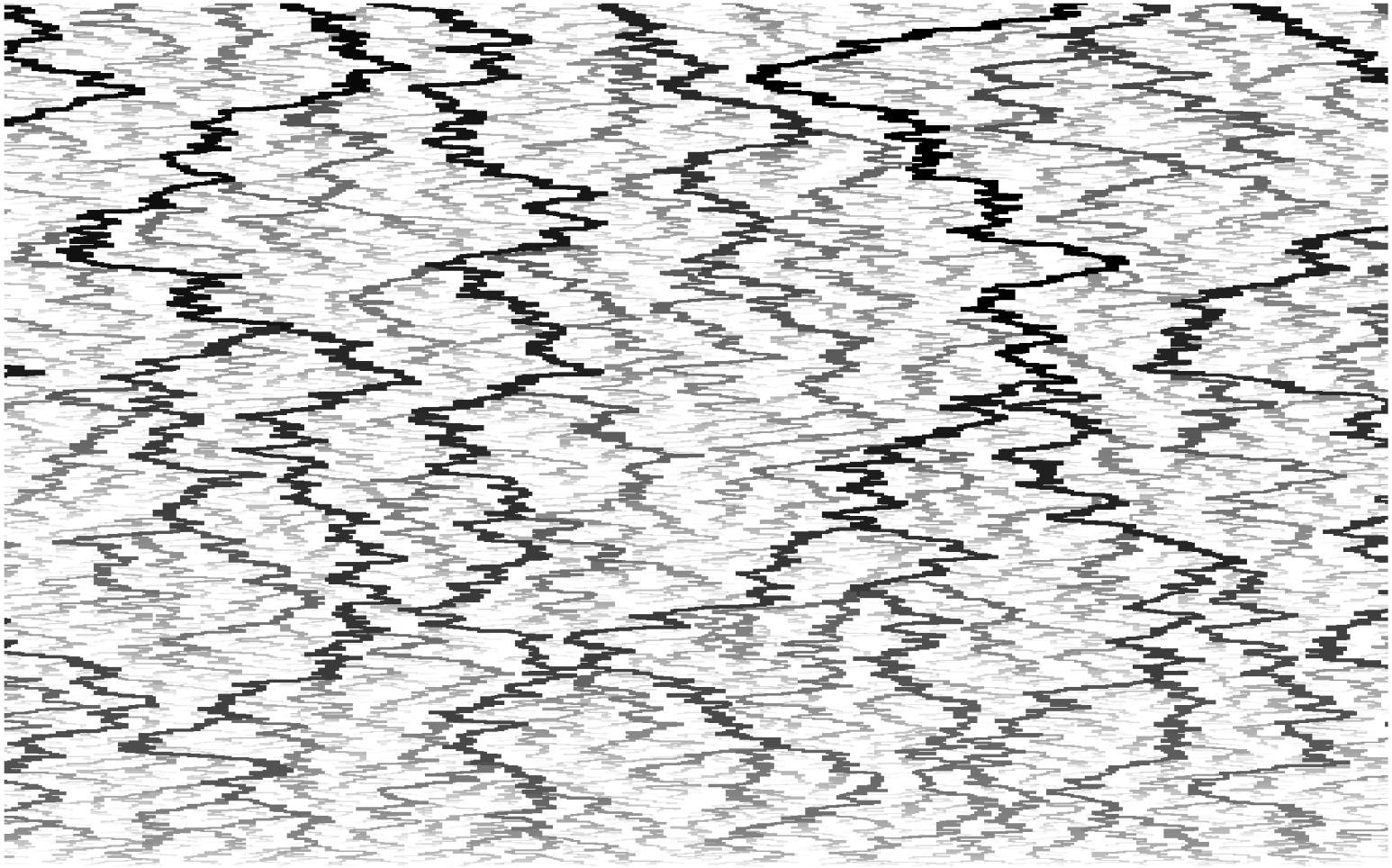
- V každém daném, deterministickém bodě $z \in \mathbb{R}^2$ začíná skoro jistě přesně jedna trajektorie $p_z \in \mathcal{W}$.
- Trajektorie $p_{z_1}, \ldots, p_{z_k}$, které začínají v konečně mnoha daných bodech $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{R}^2$, jsou rozdělené jako splývající Brownovy pohyby.

Brownova pavučina

Brownova pavučina $\mathcal{W}$ je kompaktní podmnožina prostoru trajektorií Π s následující definicí:

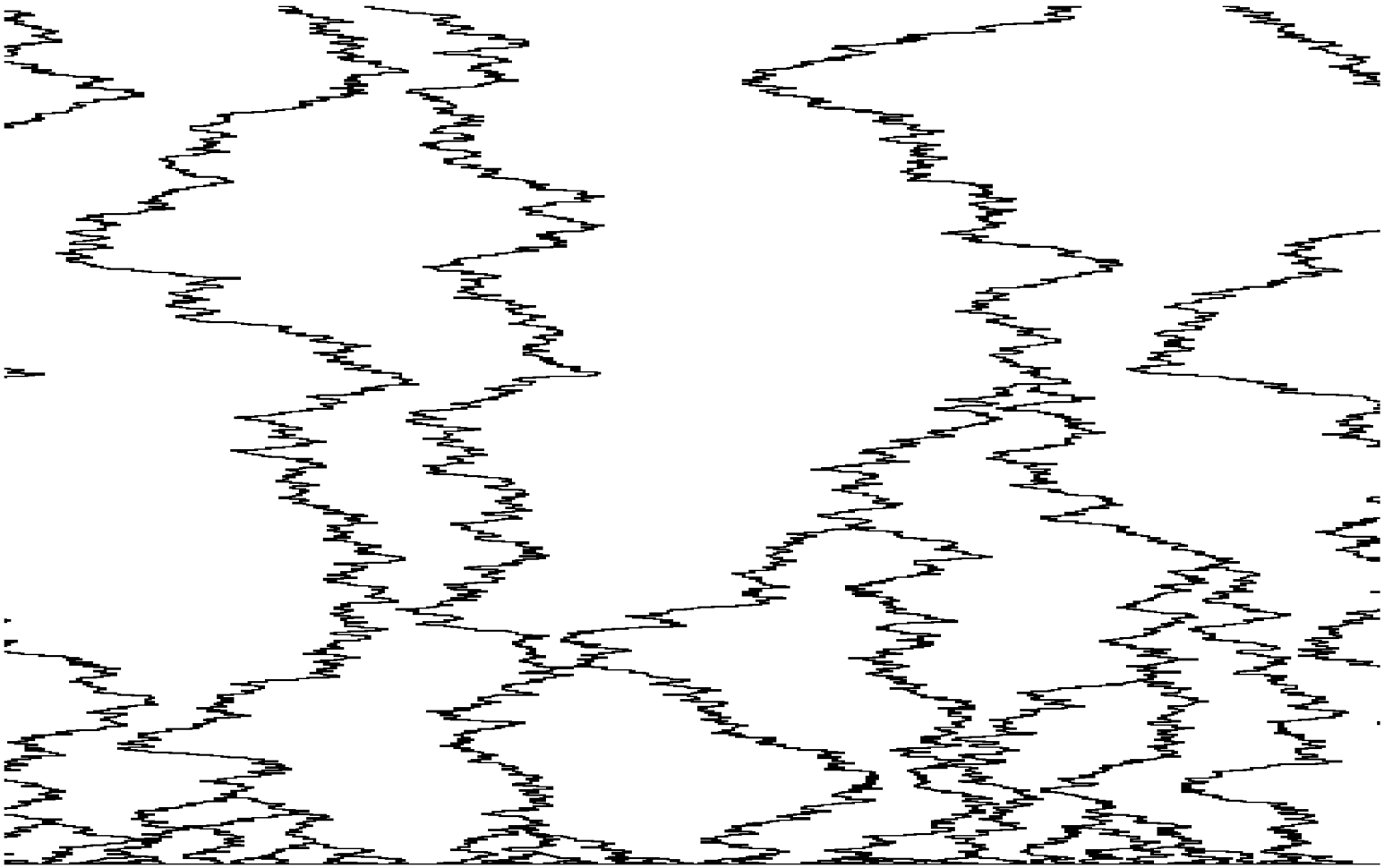
- V každém daném, deterministickém bodě $z \in \mathbb{R}^2$ začíná skoro jistě přesně jedna trajektorie $p_z \in \mathcal{W}$.
- Trajektorie $p_{z_1}, \ldots, p_{z_k}$, které začínají v konečně mnoha daných bodech $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{R}^2$, jsou rozdělené jako splývající Brownovy pohyby.
- Pro kažou danou spočetnou hustou množinu $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ platí, že $\mathcal{W}$ je uzávěr množiny $\{p_z : z \in \mathcal{D}\}$ všech trajektorií, které začínají v $\mathcal{D}$.

Brownova pavučina



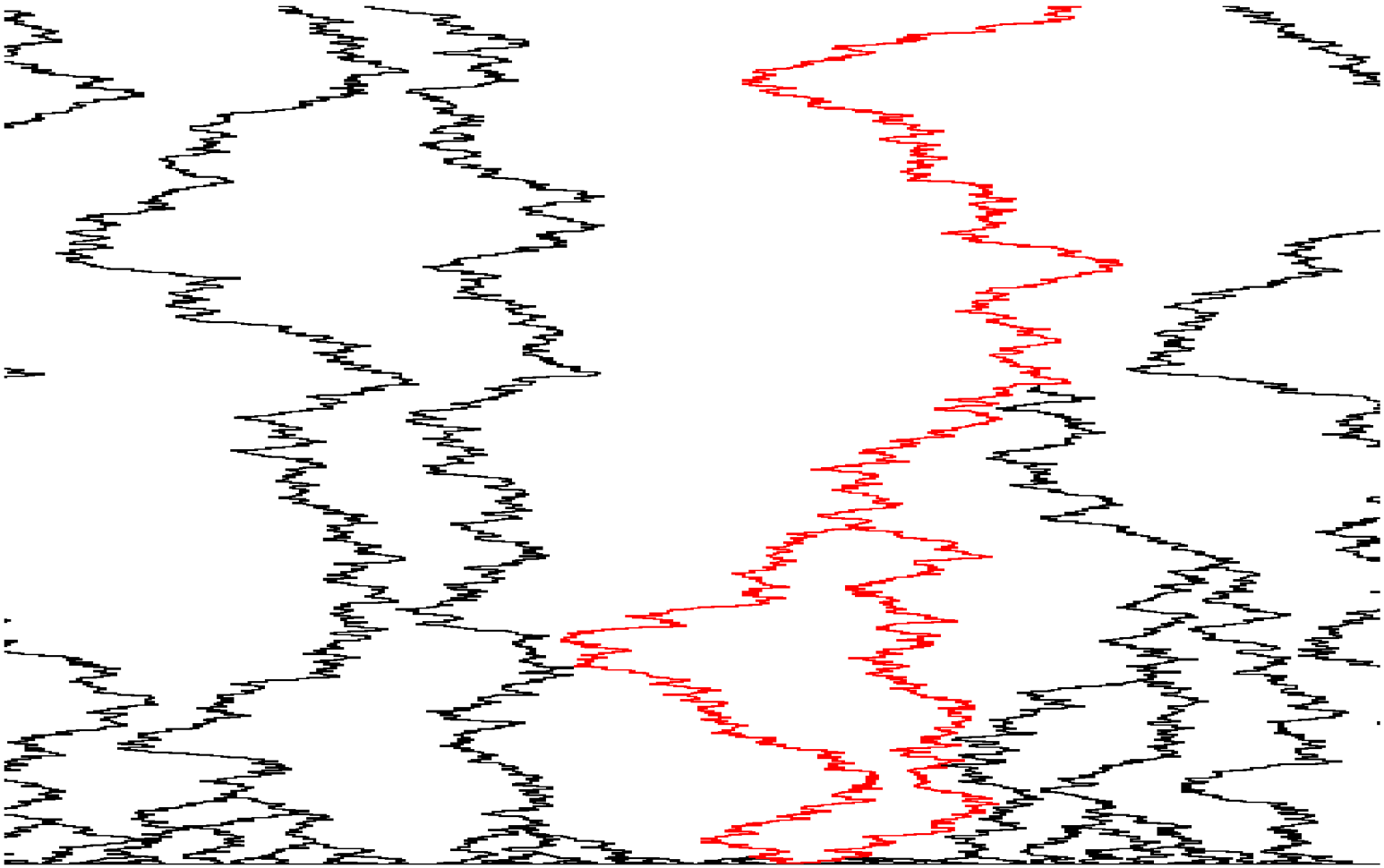
Umělecká představa Brownovy pavučiny

Brownova pavučina



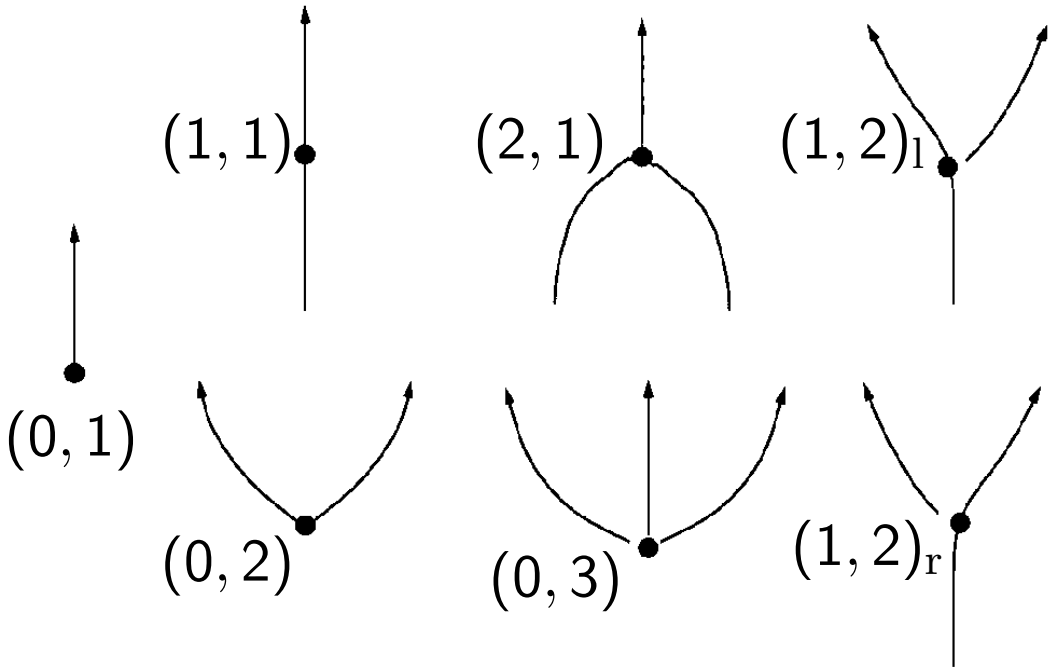
Všechny trajektorie, které začínají v čase 0.

Brownova pavučina



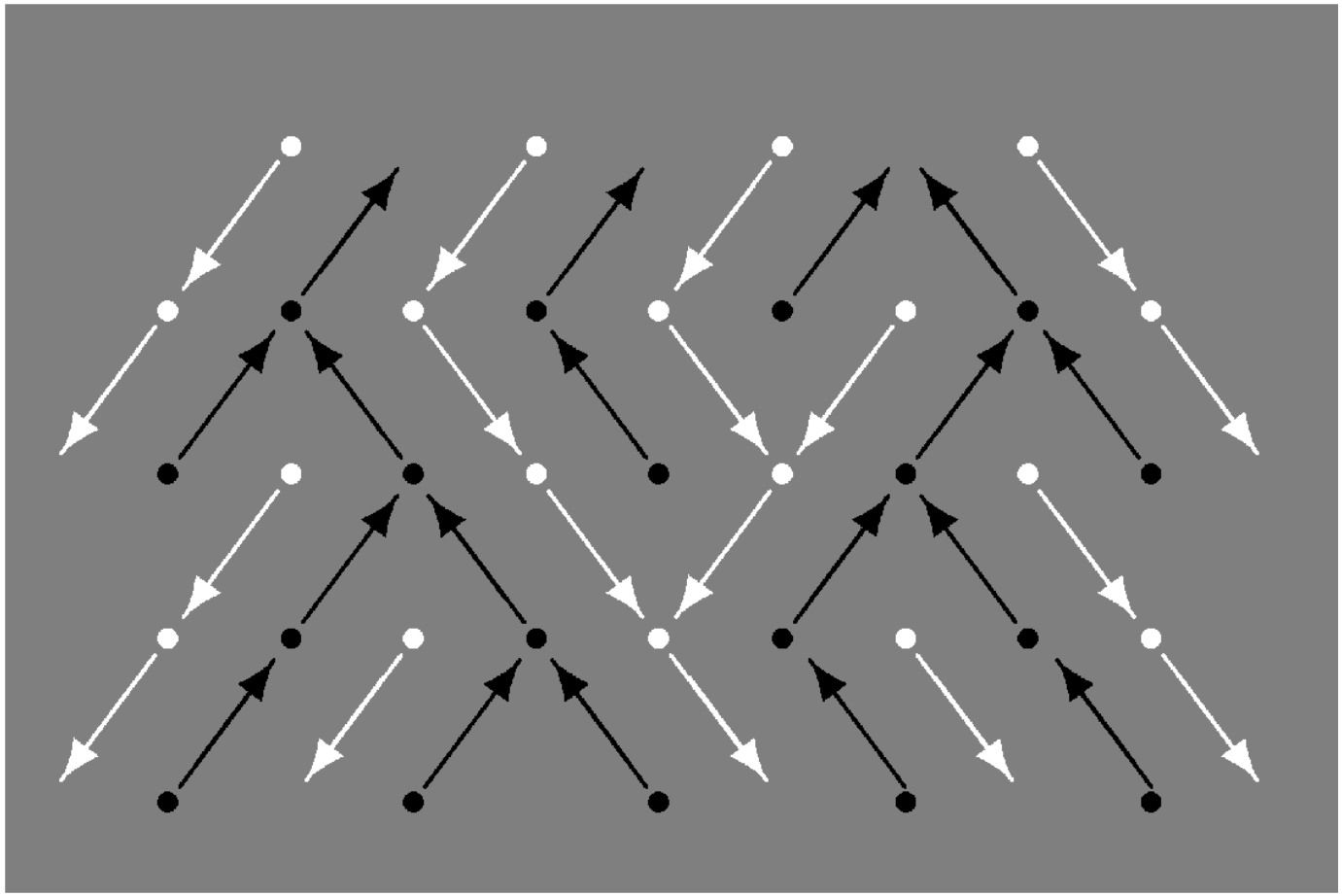
Existují náhodné body, kde začínají dvě trajektorie.

Speciální body



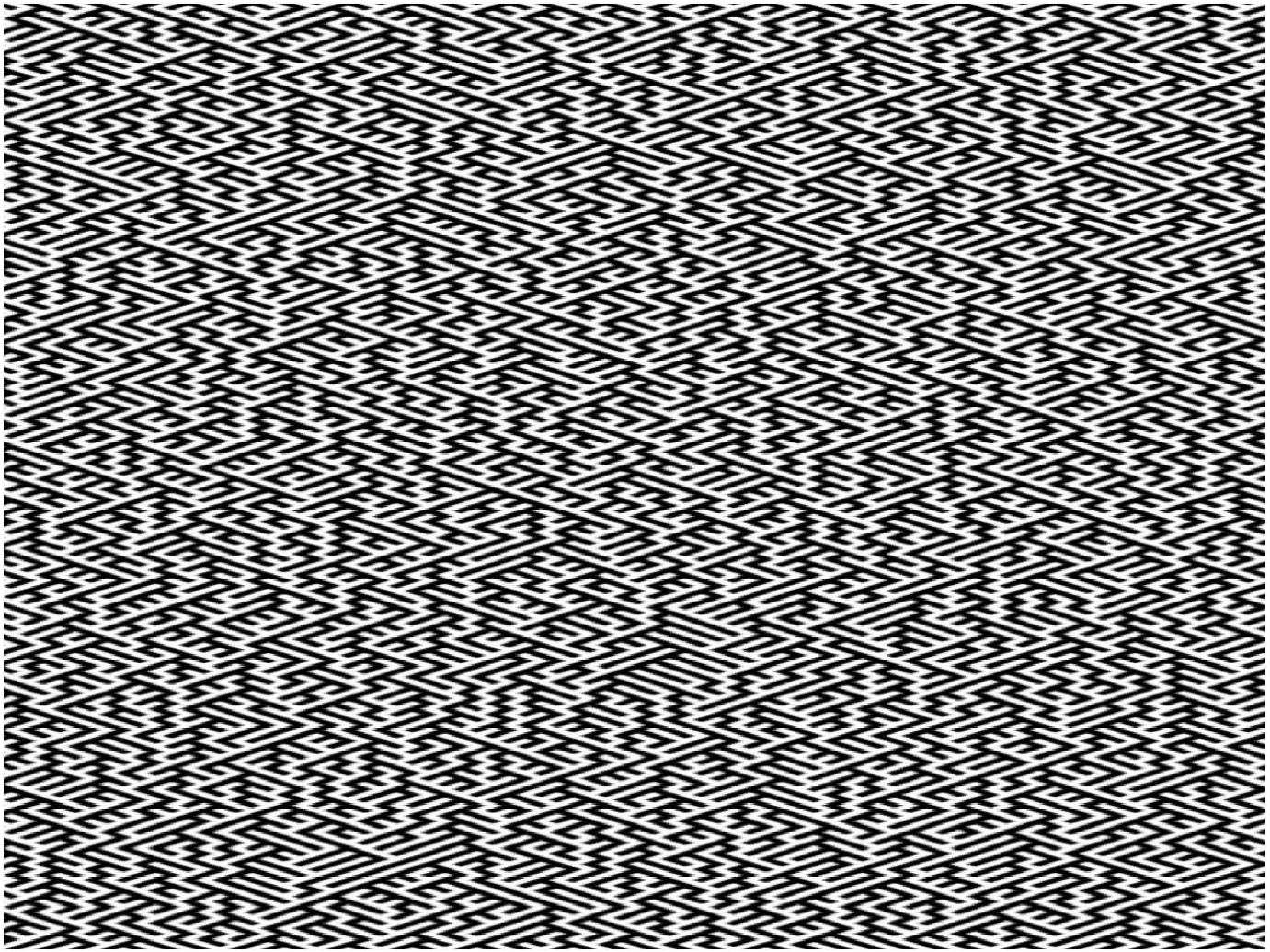
Body v rovině můžeme rozlišovat podle toho,
kolik trajektorií v nichž začíná nebo do nichž dorazí.
Vcelku existuje 7 různých typů bodů.

Duální šipky



Duální šipky ukazují dolů.

Duální Brownova pavučina



Konfigurace duální šipek konverguje k duální Brownově pavučině.

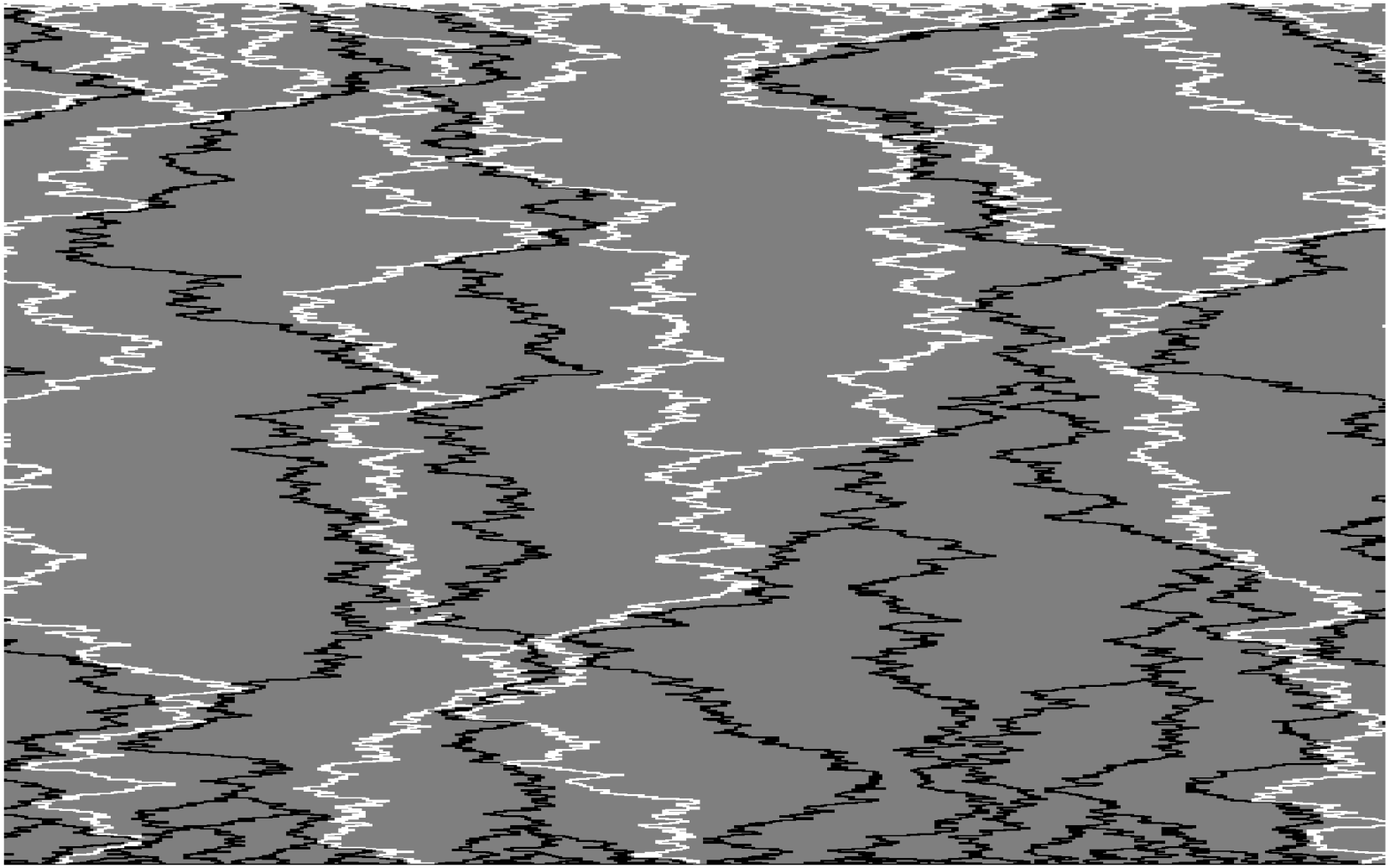
Duálni Brownova pavučina

Ke každé Brownově pavučině může přiřadit *duální pavučinu* $\hat{\mathcal{W}}$, která je skoro jiště jednoznačně určená a stejně rozdělená jako původní pavučina po rotaci o 180°.

Duální trajektorie se odrazí od trajektorií, které vedou nahoru.

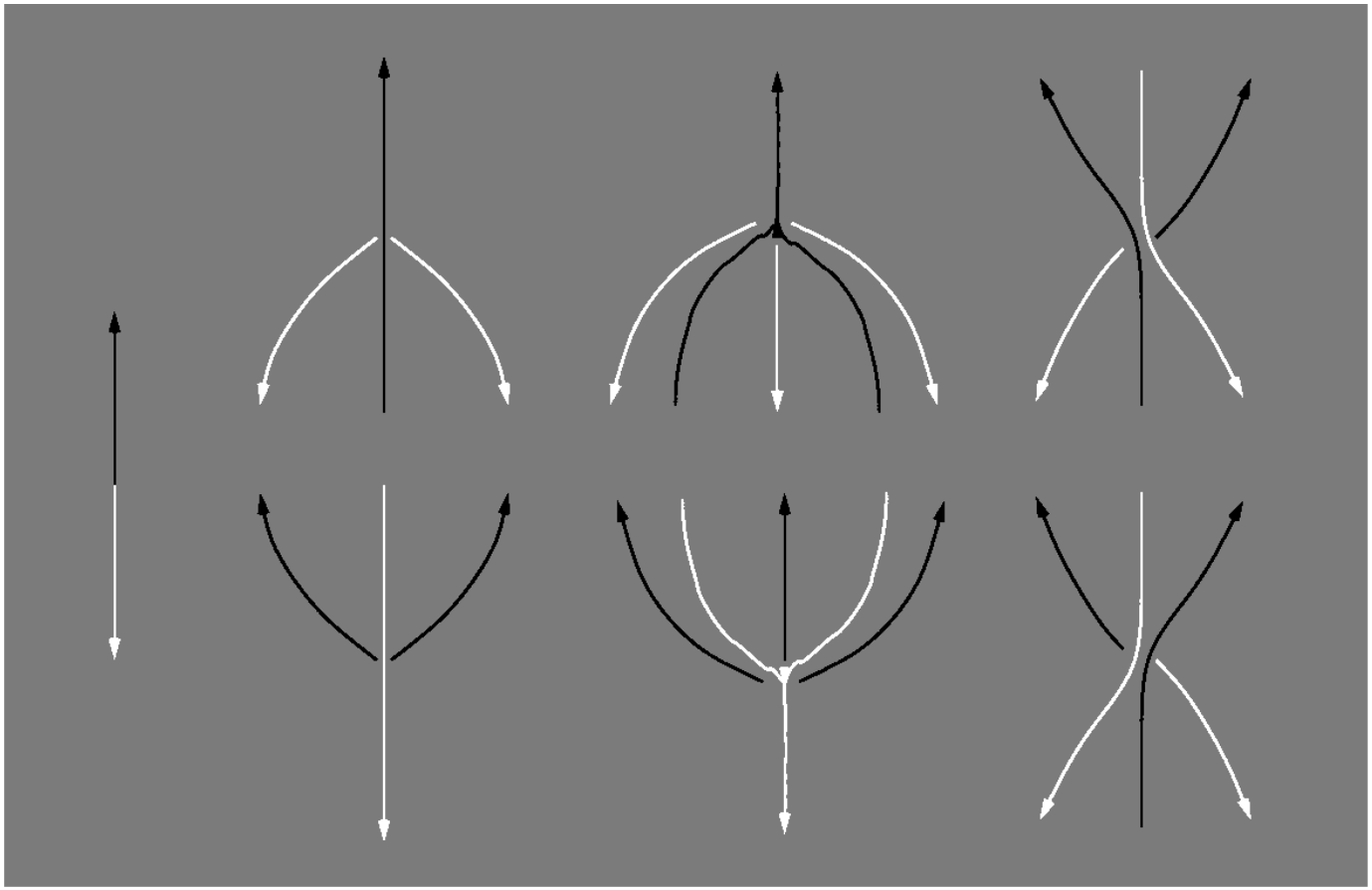
Přesněji řečeno: pokud si svolíme konečně mnoho bodů, a podmíníme na trajektorie, které z těchto bodů vedou nahoru, pak podmínenou distribuci duálních trajektorií lze popsat Skorohodovou reflekcí.

Duálni Brownova pavučina



Všechny trajektorie v pavučině (černé) a duální pavučině (bílé), které začínají ve dvou daných časech.

Speciální body



Struktura různých typů bodů z pohledu duální pavučiny.

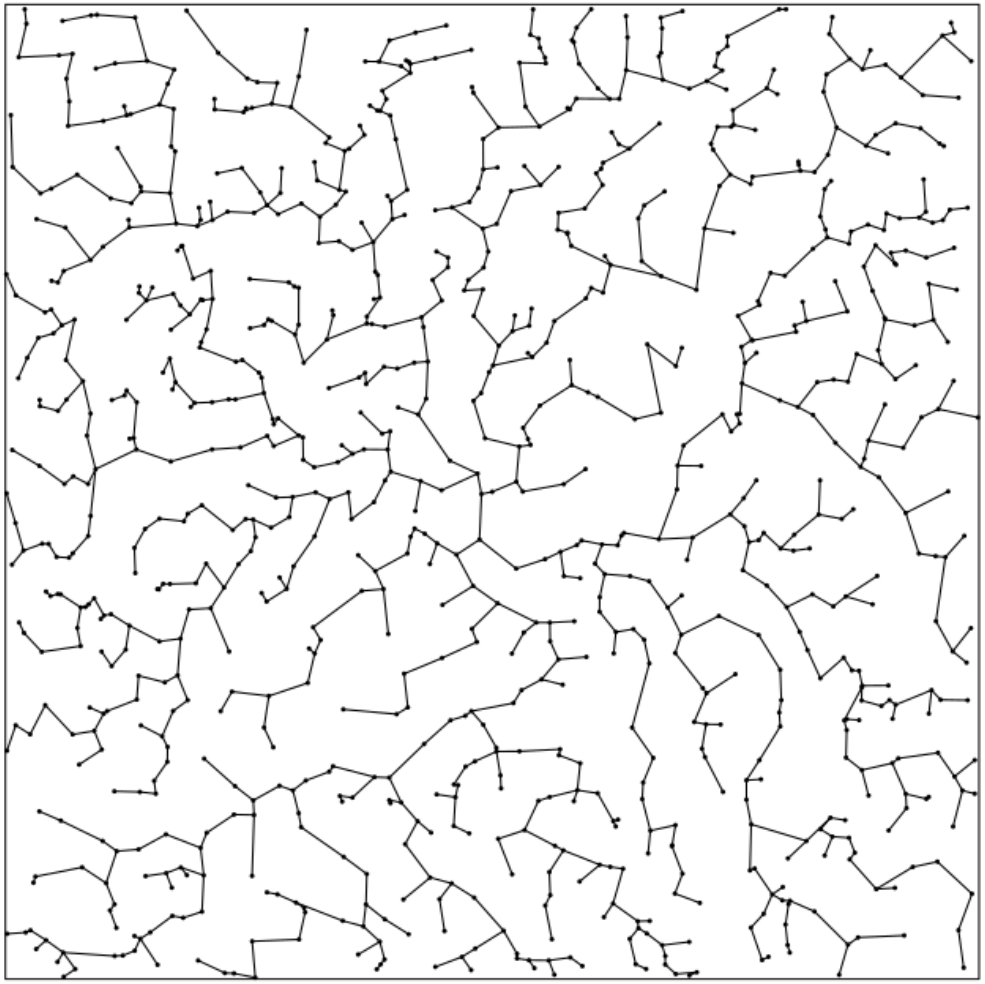
Universalita

Stejně jako normální rozdělení a Brownův pohyb, je i Brownova pavučina do jsté míry *universální* skálovací limitou.

Například je Brownova pavučina skálovací limita obecnějších splývajících náhodných procházek, jejichž přirůstky mají libovolné rozdělení na $\mathbb{Z}$, které ovšem musí mít konečný třetí moment.

Navíc se Brownova pavučina vyskytne ve studiu komunikačních sítí. Představme se, že každý bod Poissonové bodové množiny představuje člověk.
Každý člověk posílá zprávu buď přímo do centrále, nebo na nejbližší člověk, který je blíž k centráli.

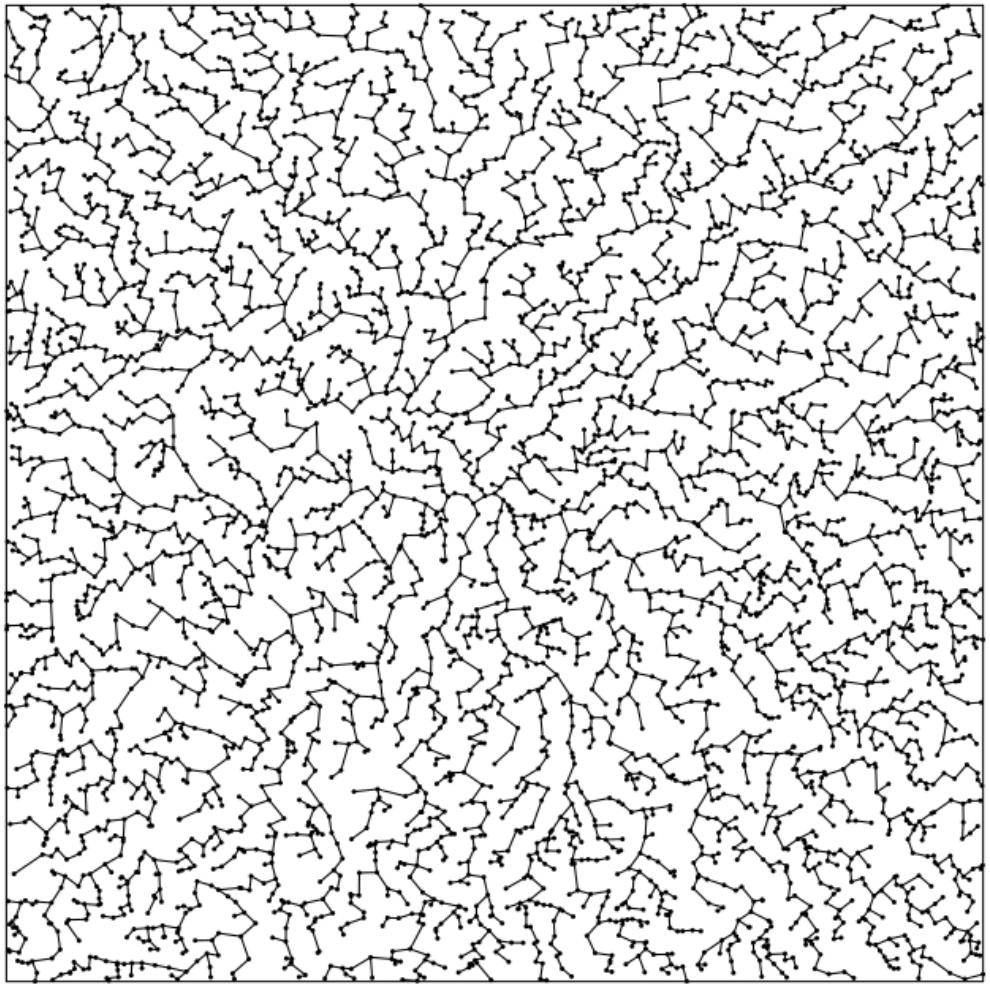
Universalita



Tento model je známý jako *Euclidean directed spanning forest*[2] (DSF).

[2] Děkuji Kateřině Pawlasové za obrázky.

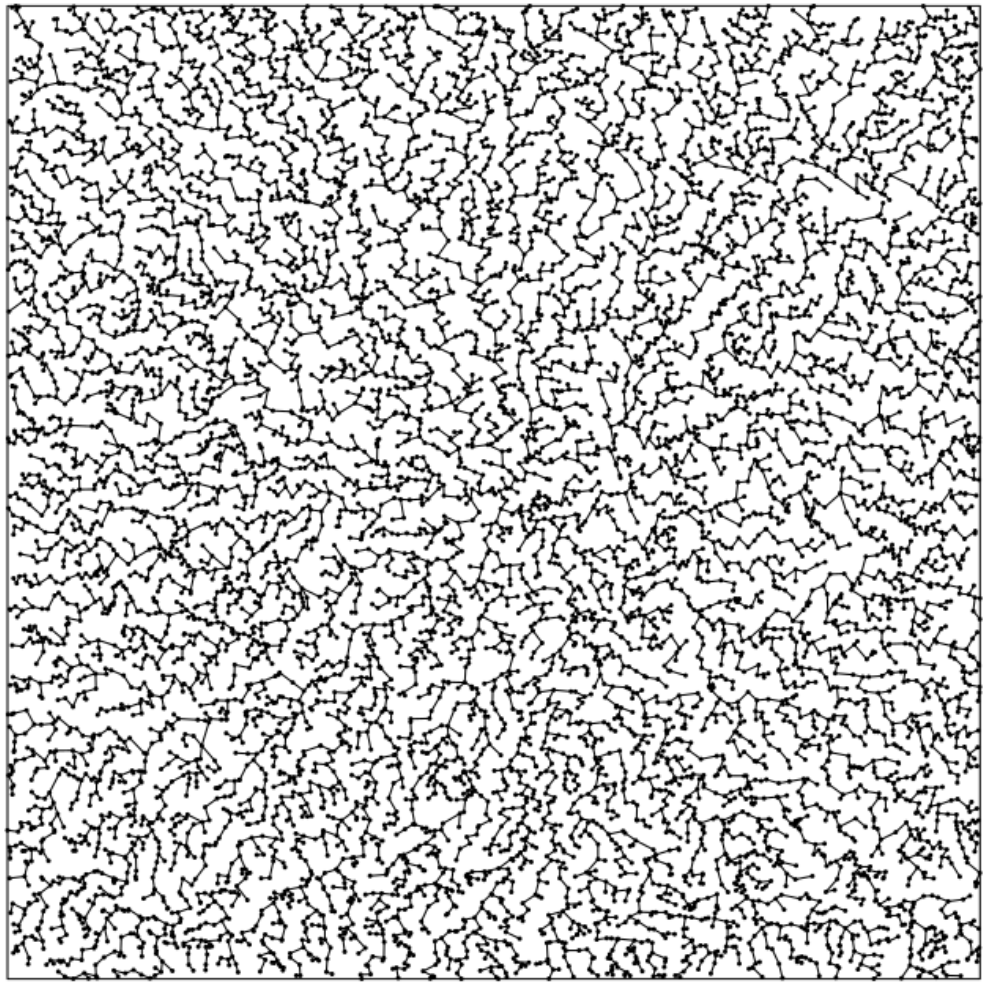
Universalita



Tento model je známý jako *Euclidean directed spanning forest*[2] (DSF).

[2] Děkuji Kateřině Pawlasové za obrázky.

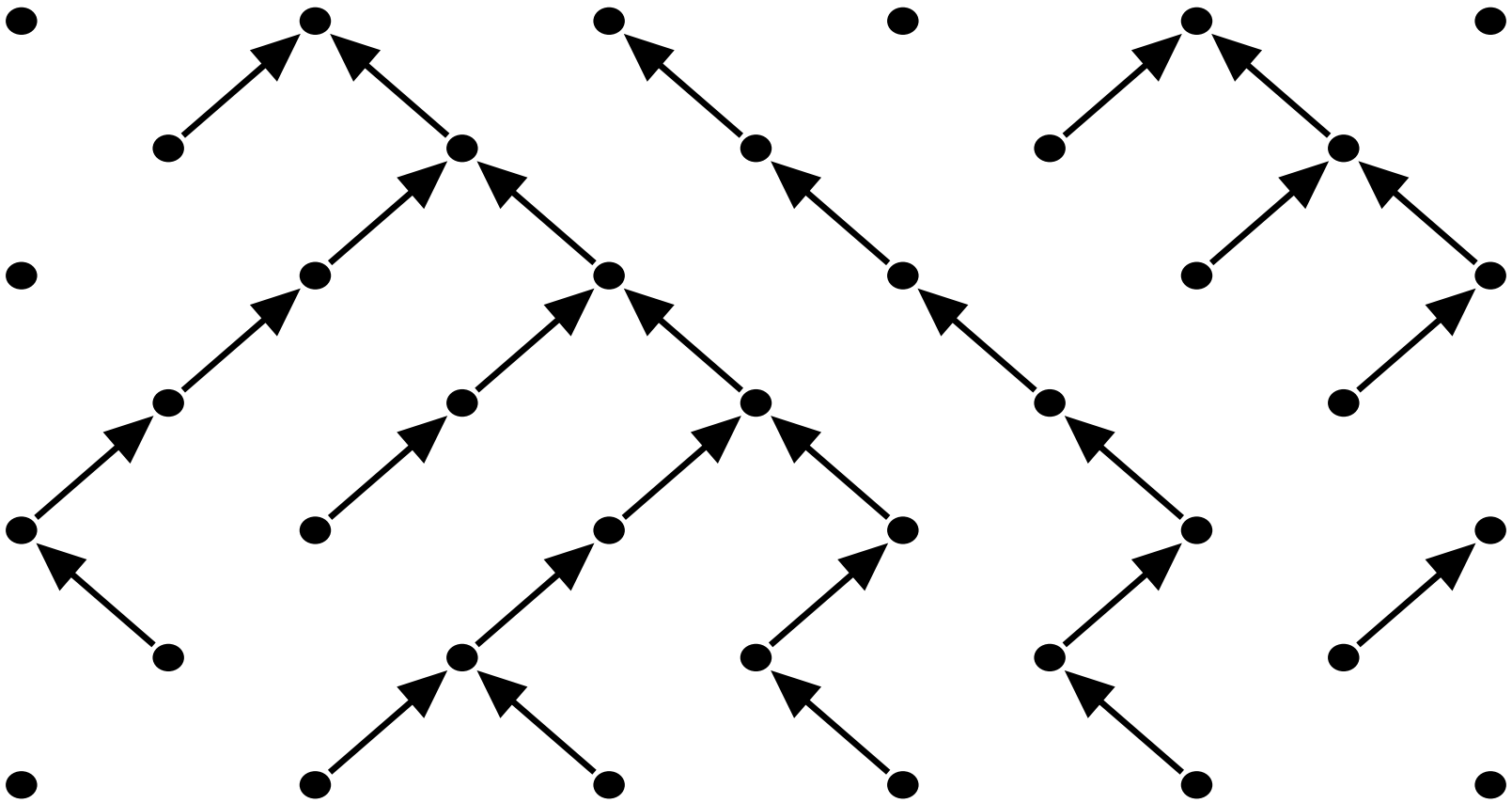
Universalita



Tento model je známý jako *Euclidean directed spanning forest*[2] (DSF).

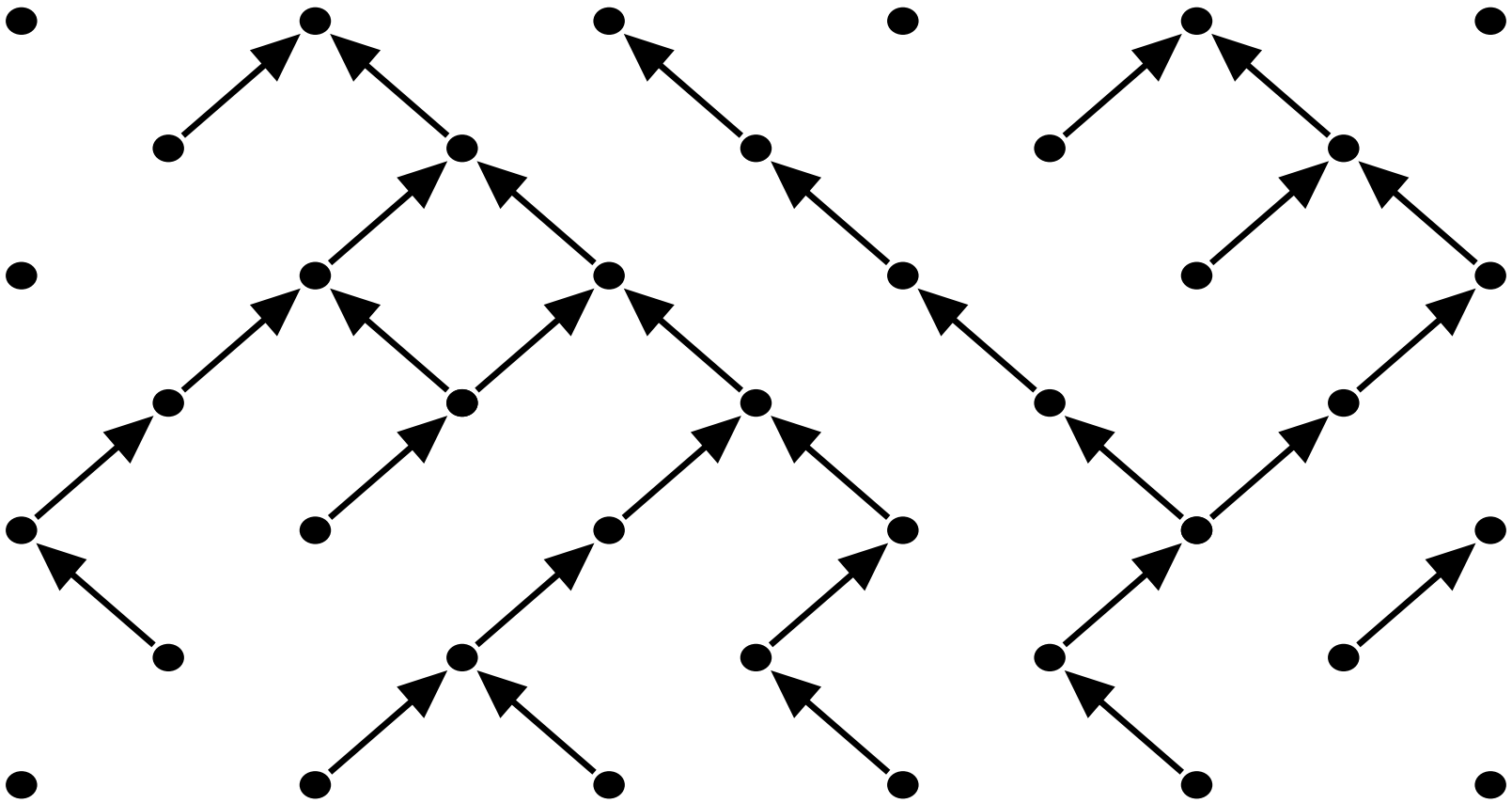
[2] Děkuji Kateřině Pawlasové za obrázky.

Větvení



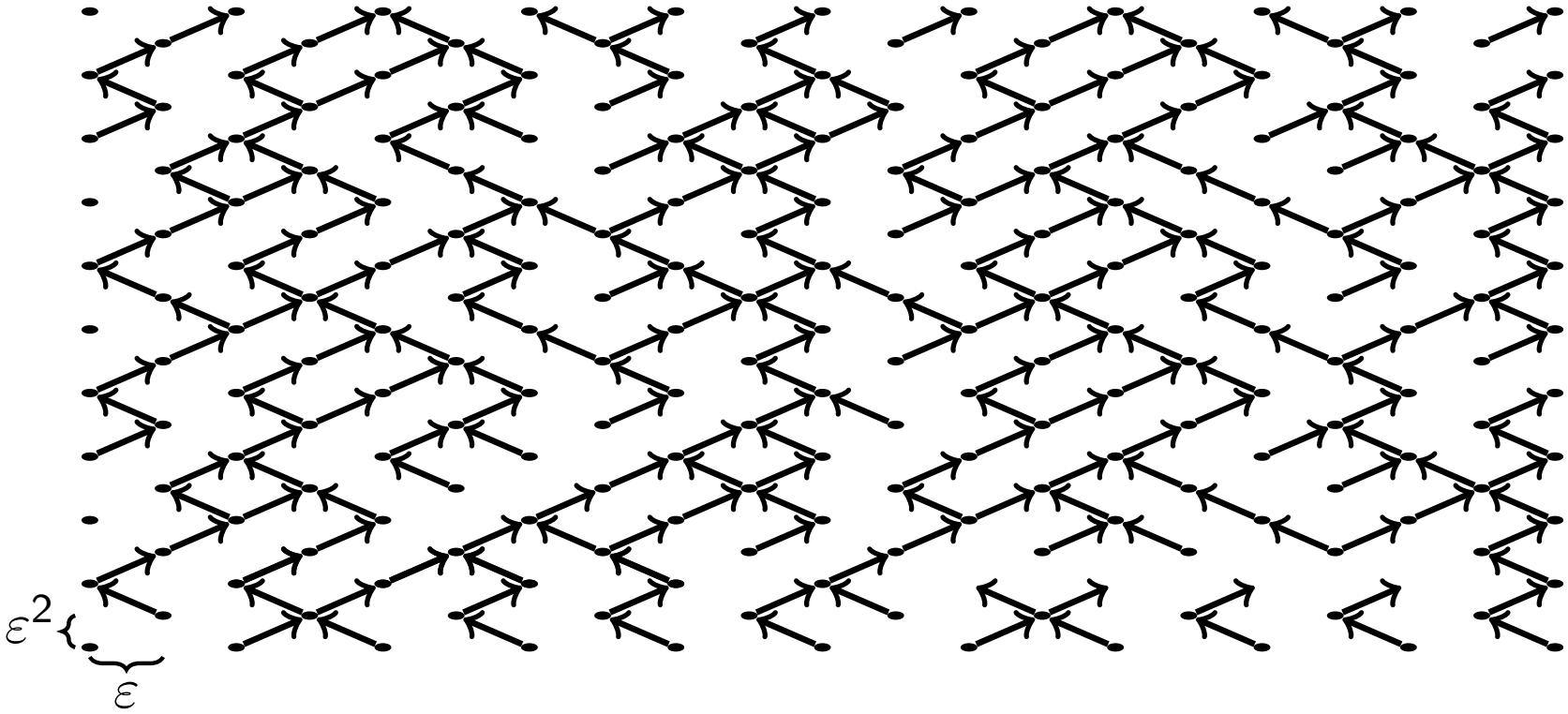
Změníme naši konfiguraci šipek tím, že v každém bodě s malou pravděpodobností ε nakreslíme jak šipku doleva, tak šikpu doprava.

Větvení



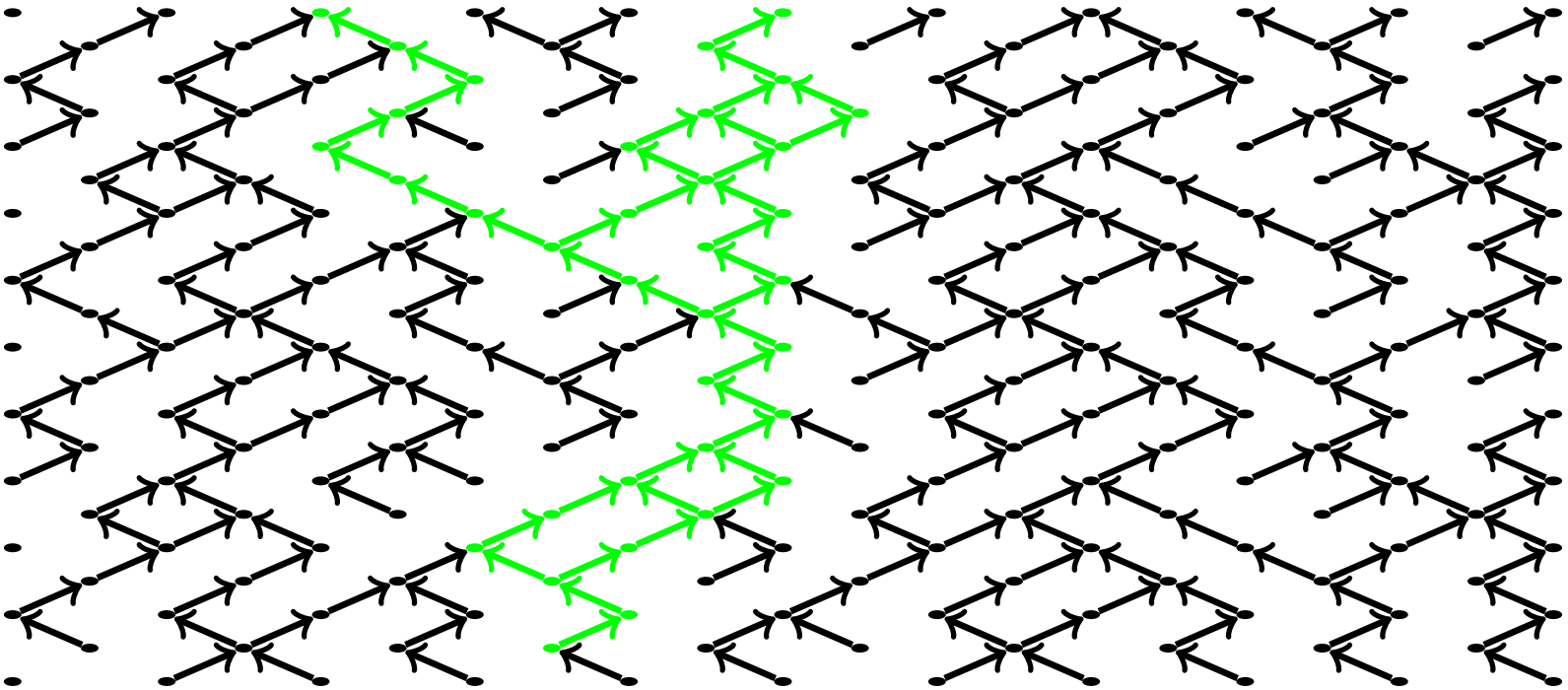
Změníme naši konfiguraci šipek tím, že v každém bodě s malou pravděpodobností ε nakreslíme jak šipku doleva, tak šikpu doprava.

Větvení



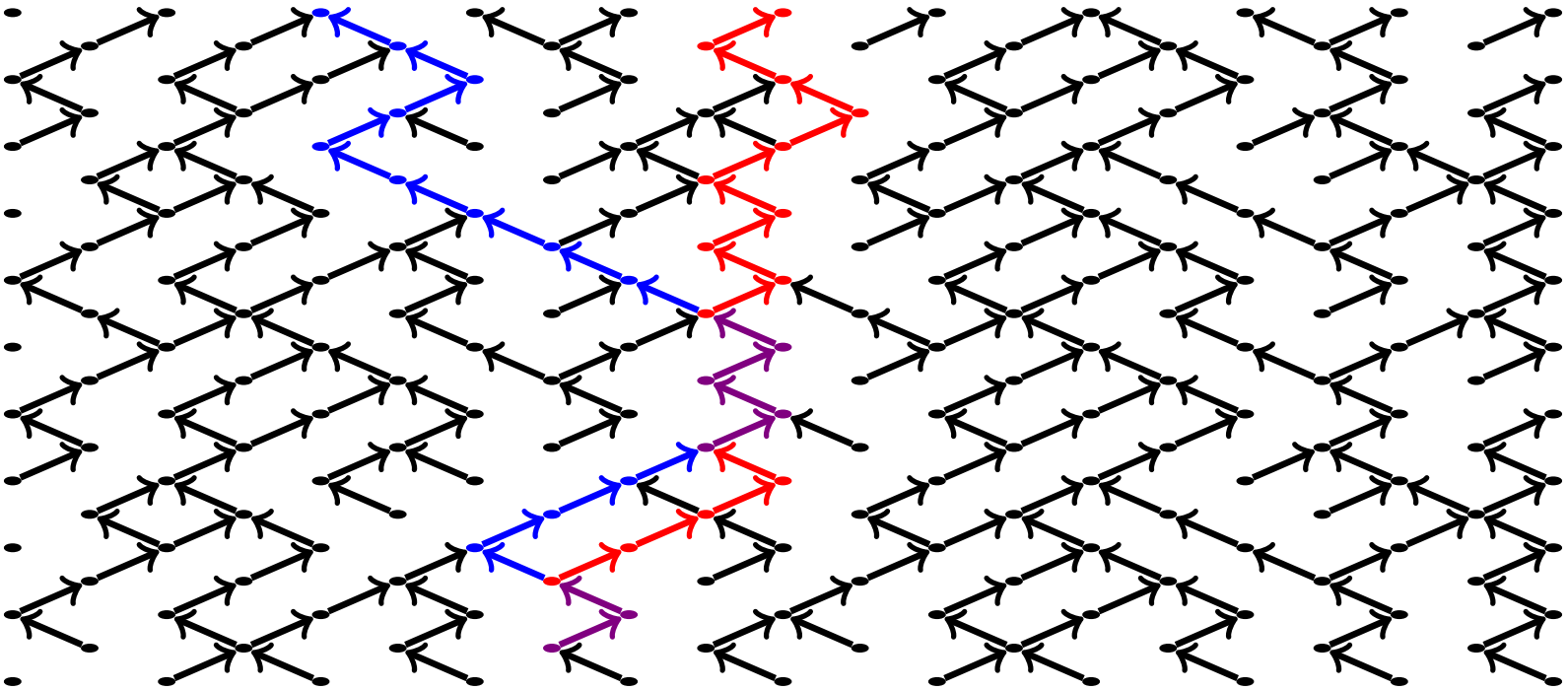
Zase všechny vzdáleností v prostoru násobíme ε
a všechny časové úseky násobíme ε^2.

Větvení



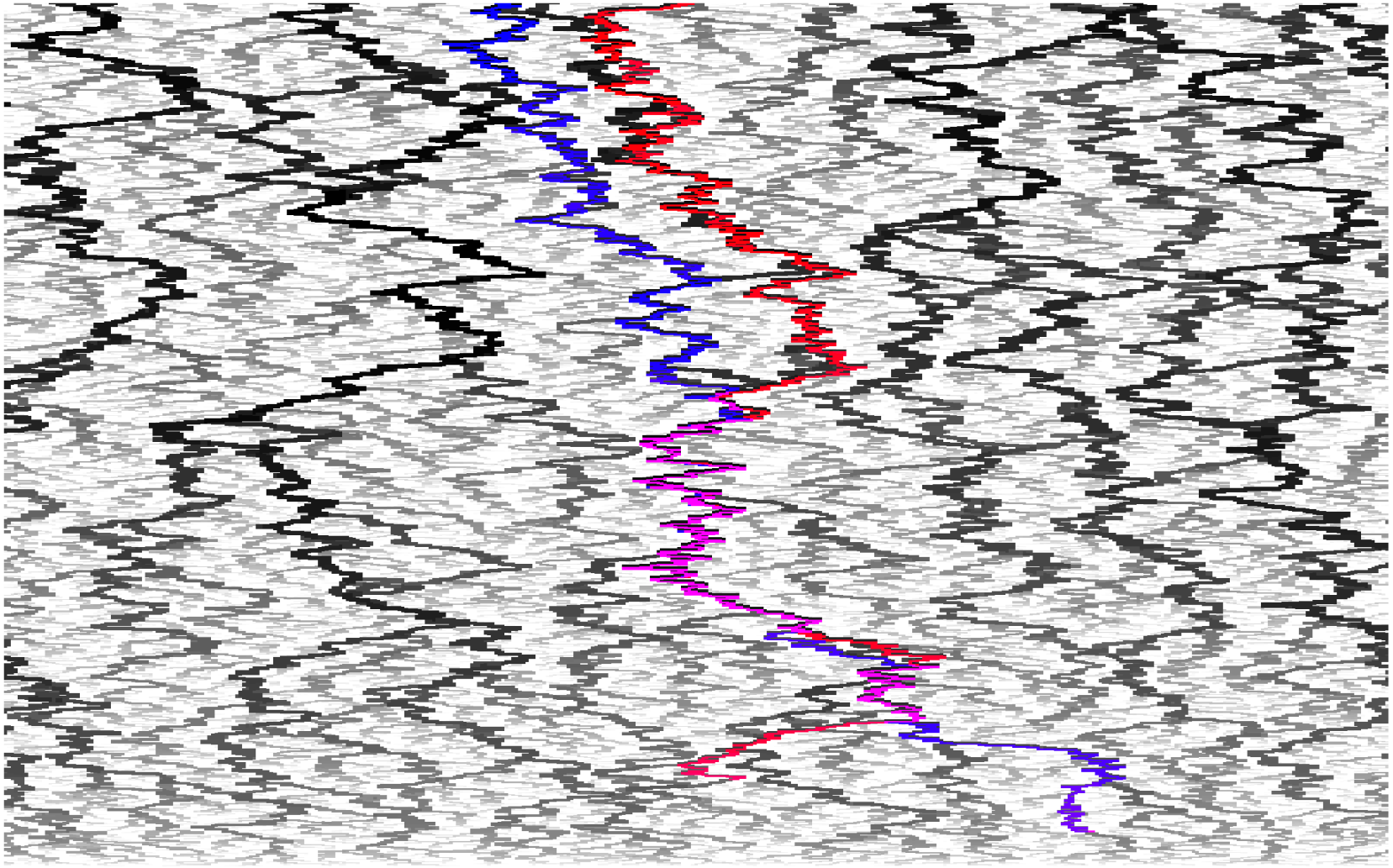
Teď v každém bodě začíná mnoho trajektorií.

Trajektorie vlevo a vpravo



V každém bodě ale začíná jedna trajektorie, která je úplně vlevo, a jedná, která je úplně vpravo.

Trajektorie vlevo a vpravo



Trajektorie vlevo a vpravo v limitě.

Trajektorie vlevo a vpravo

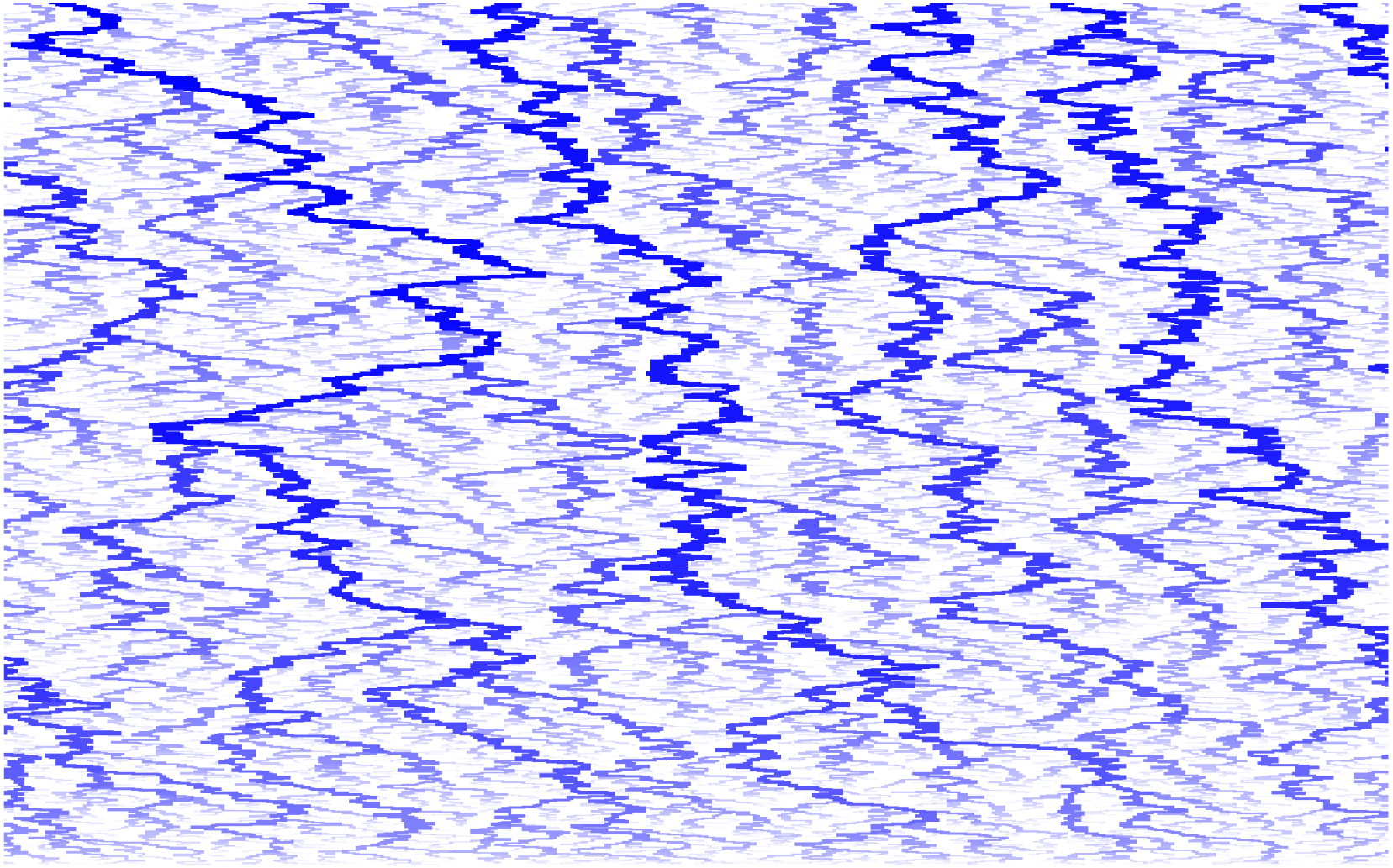
V limitě jsou trajektorie vlevo a vpravo popsány následující stochastickou diferenciální rovnicí:

$$\mathrm{d}L_t = 1_{\{L_t \neq R_t\}} \mathrm{d}B_t^{\mathrm{l}} + 1_{\{L_t = R_t\}} \mathrm{d}B_t^{\mathrm{s}} - \mathrm{d}t,$$
$$\mathrm{d}R_t = 1_{\{L_t \neq R_t\}} \mathrm{d}B_t^{\mathrm{r}} + 1_{\{L_t = R_t\}} \mathrm{d}B_t^{\mathrm{s}} + \mathrm{d}t,$$

kde $B_t^{\mathrm{l}}, B_t^{\mathrm{r}}, B_t^{\mathrm{s}}$ jsou nezávislé Brownovy pohyby, a L_t a R_t plní podmínku $L_t \leq R_t$ pro každé $t \geq \tau := \inf\{u \geq 0 : L_u = R_u\}$.

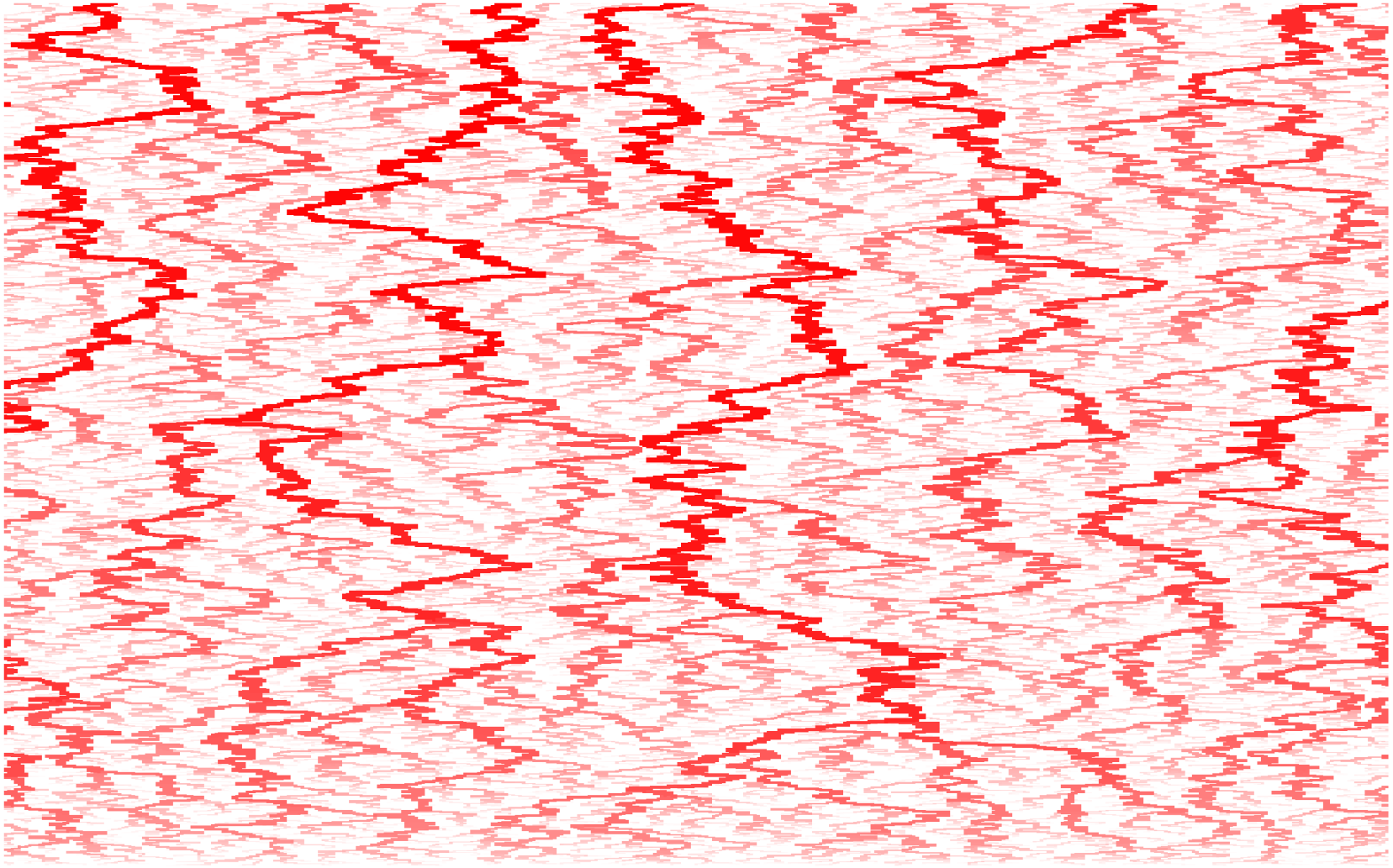
Množina $\{t : L_t = R_s\}$ není nikde hustá
a má positivní Lebesgueovou míru.

Levá Brownova pavučina



Všechny trajektorie vlevo tvoří levou Brownovu pavučinu...

Pravá Brownova pavučina



. . . a trajektorie vpravo tvoří pravou Brownovu pavučinu.

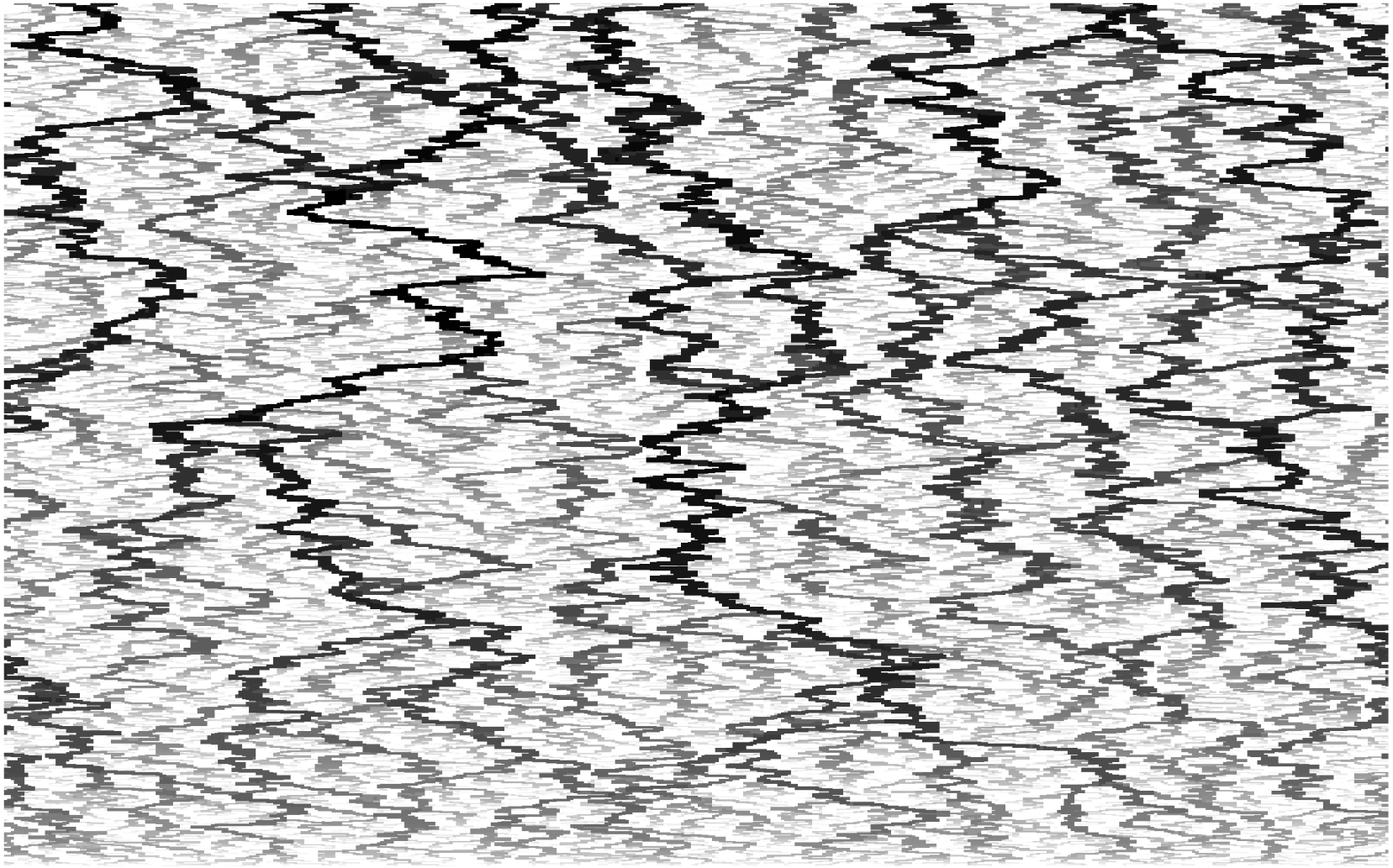
Konvergence k Brownově síti

Věta [Sun, S. (2008)] Nechť je $\mathcal{U}_\varepsilon$ náhodná množina všech trajektorií v konfiguraci šipek s větvením. Potom

$$\mathbb{P}[\theta_\varepsilon(\mathcal{U}_\varepsilon) \in \cdot\,] \underset{\varepsilon\to 0}{\Longrightarrow} \mathbb{P}[\mathcal{N} \in \cdot\,],$$

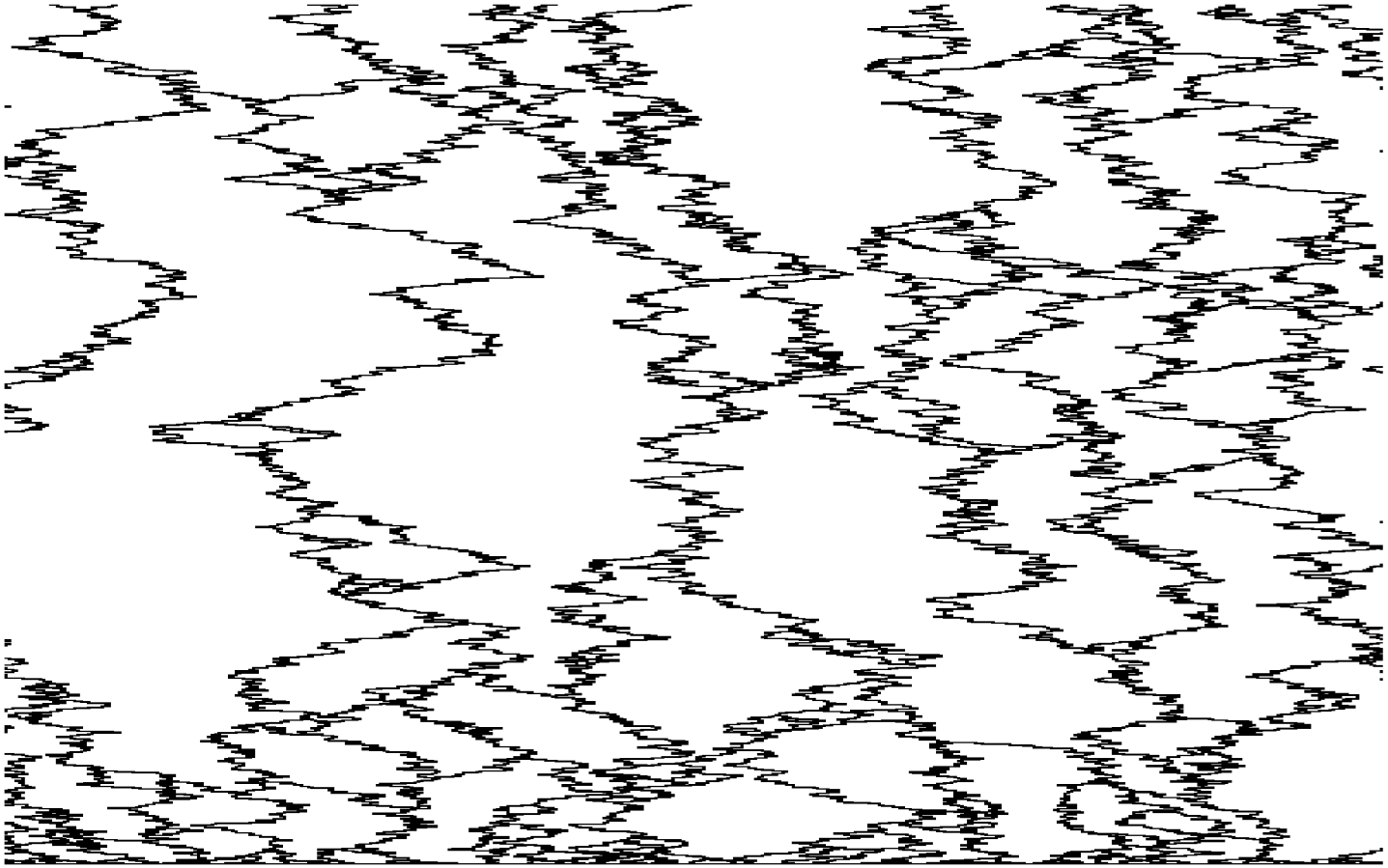
kde $\Rightarrow$ značí slabou konvergenci pravděpodobnostních měr na prostoru $\mathcal{K}(\Pi)$ a limitní náhodná kompaktní množina trajektorií $\mathcal{N}$ se jmenuje *Brownova síť* (Brownian net).

Brownova síť



Umělecká představa Brownovy sítě.

Brownova síť



Všechny trajektorie, které začínají v čase 0.

Proces rozdělení a sjednocení

Pro každou uzavřenou množinu $A \subset \mathbb{R}$,

$$\xi_t := \left\{\pi_t : \exists \pi \in \mathcal{N} \text{ t.ž. } \sigma_\pi = 0,\ \pi_0 \in A\right\} \qquad (t \geq 0)$$

definuje Markovský proces $(\xi_t)_{t\geq 0}$, který nabere hodnoty v prostoru všech uzavřených podmnožin reální osy.

(i) Invariantní mírá: rozdělení Poissonové bodové množiny s intensitou 2.

(ii) Pro deterministické $t > 0$ a $a < b$ platí, že $\xi_t \cap (a, b)$ je skoro jistě konečná.

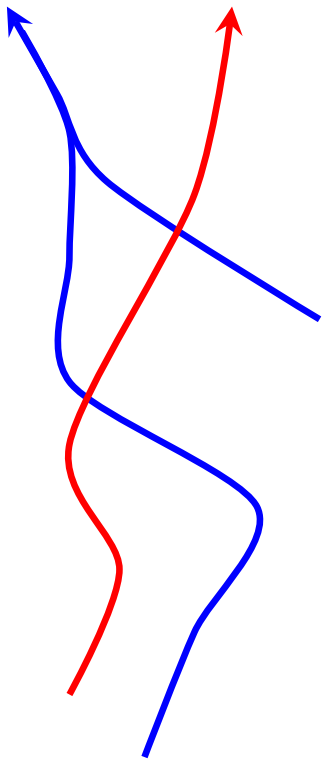
(iii) Existují ale náhodné časy, ve kterém ξ_t není lokálně konečná, a takové časy tvoří dokonce hustou podmnožinu $[0, \infty)$.

Konvergence k Brownově síti

Důkaz věty o konvergenci k Brownově síti

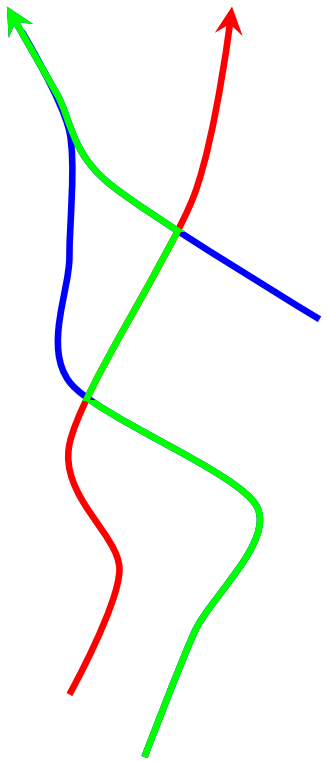
1. Konvergence množin všech trajektorií vlevo a vpravo: $\mathbb{P}[\theta_\varepsilon(\mathcal{U}^{\mathrm{l}}_\varepsilon, \mathcal{U}^{\mathrm{r}}_\varepsilon) \in \cdot\,] \underset{\varepsilon\to 0}{\Longrightarrow} \mathbb{P}[(\mathcal{W}^{\mathrm{l}}, \mathcal{W}^{\mathrm{r}}) \in \cdot\,]$.
2. Těsnost implikuje konvergenci podposloupnosti: existují $\varepsilon_n \to 0$ a náhodná kompaktní množina $\mathcal{K} \subset \Pi$, takže $\mathbb{P}[\mathcal{U}_{\varepsilon_n} \in \cdot\,] \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \mathbb{P}[\mathcal{K} \in \cdot\,]$.
3. Dolní mez $\mathcal{N}^- \subset \mathcal{K}$.
4. Horní mez $\mathcal{K} \subset \mathcal{N}^+$.
5. $\mathcal{N}^- = \mathcal{N}^+ =: \mathcal{N}$.

Dolní mez



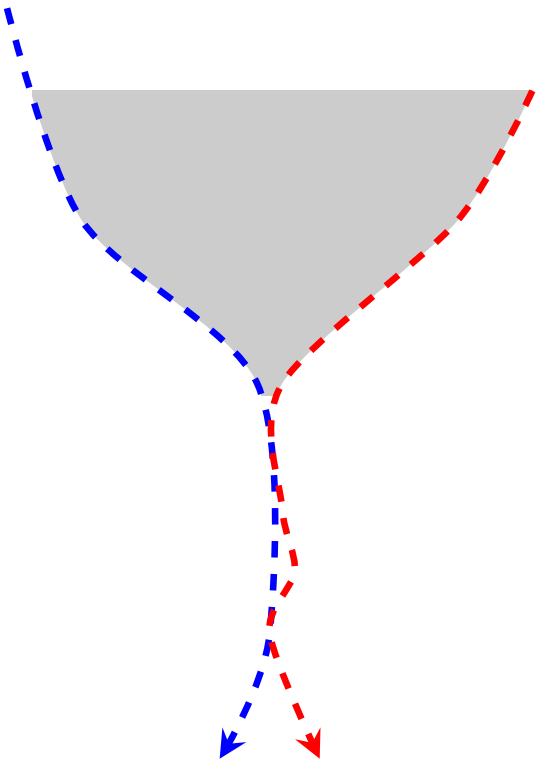
Dolní mez $\mathcal{N}^-$ je uzávěr množiny všech trajektorií, které lze konstruovat přeskakováním z levé trajektorie na pravou trajektorii a zpět, v bodech kde se kříží.

Dolní mez



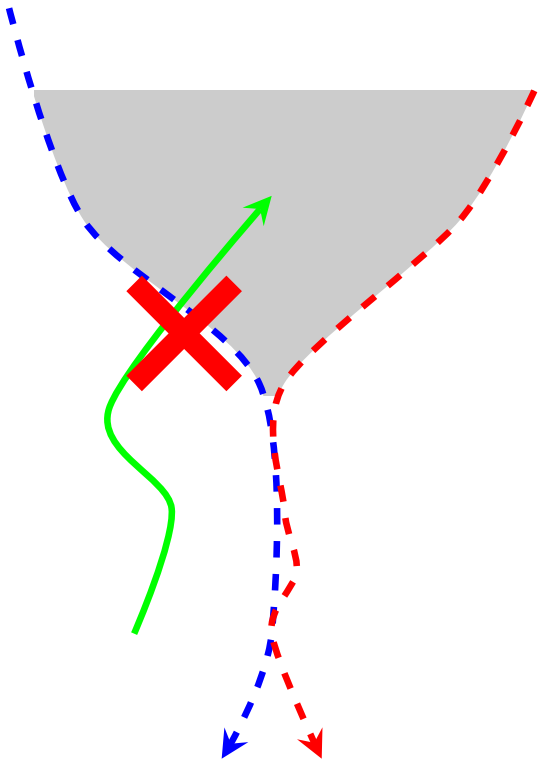
Dolní mez $\mathcal{N}^-$ je uzávěr množiny všech trajektorií, které lze konstruovat přeskakováním z levé trajektorie na pravou trajektorii a zpět, v bodech kde se kříží.

Horní mez



Oka sítě jsou definováná jako oblast mezi dvěma trajektoriemi duální levé a pravé pavučiny, které se v dolním bodu oka dotýkají.

Horní mez



Horní mez $\mathcal{N}^+$ je definován jako množina všech trajektorií, které nevstoupají zvenku do žádného oka sítě.

Historické poznámky

- R. Arratia ('79,'81) studuje Brownovy pohyby, které začínají v každém bodě cašoprostoru.
- B. Tóth a W. Werner ('98) najdou všechny speciální body.
- F. Soucaliuc, B. Tóth a W. Werner ('00) popisují jak se duální trajektorie odrazí od trajektorií vedoucích nahoru.
- L. Fontes, M. Isopi, C. Newman a K. Ravishankar ('04) se poprvé na Brownovu pavučinu dívají jako na kompaktní množinu trajektorií a dokazují konvergenci konfigurací šipek k pavučině.
- C. Newman, K. Ravishankar a R. Sun ('05) dokazují konvergenci pro splývající náhodné procházky, jejichž přirůstky mají konečný pátý moment.

Historické poznámky

- S. Belhaouari, T. Mountford, R. Sun a G. Valle ('06) dokazují konvergenci pro splývající náhodné procházky, jejichž přirůstky mají konečný $(3+\varepsilon)$-tý moment.
- F. Baccelli a C. Bordenave ('07) vynalézají Euclidean directed spanning forest.
- R. Sun and J.S. ('08) vynalézají Brownovu síť a dokazují konvergenci k ní pro konfigurace šipek s větvením.
- C. Newman, K. Ravishankar, and E. Schertzer ('10) publikují alternativní konstrukci Brownovy sítě.
- D. Coupier, K. Saha, A. Sarkar a V.C. Tran ('20) dokazují, že Euclidean directed spanning forest konverguje k Brownově pavučině.

Otevřené problémy

- Konvergence k Brownově síti pro obecné splývající náhodné procházky s větvením.
- Charakterizace generatoru procesu rozdělení a sjednocení.