

# Samo-organizovaná kritikalita na burze a v emailové komunikaci

Jan M. Swart  
v spolupráci s Marcem Formentinem a Janou Plačkovou

Praha, 24 června 2015.

# Trocha klasické ekonomické teorie

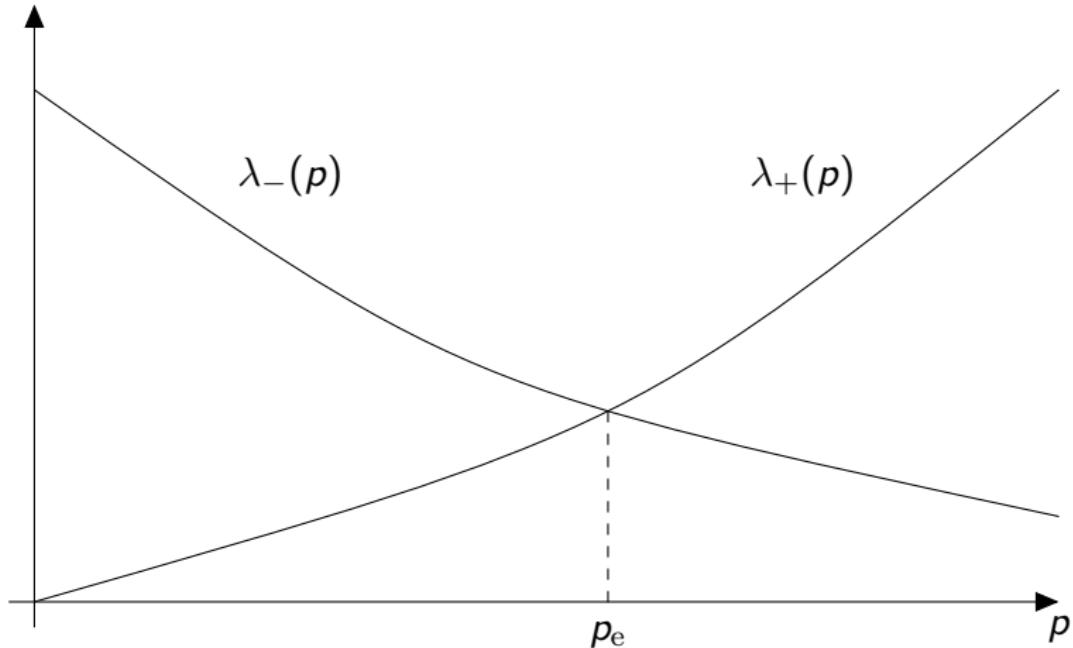
V klasické ekonomické teorii (Walras<sup>1</sup> 1874) je *cena zboží* dáná *poptávkou a nabídkou*.

Nechť  $\lambda_-(p)$  (resp.  $\lambda_+(p)$ ) je celková *poptávka* (resp. *nabídka*) nějakého zboží při cenové úrovni  $p$ , tudíž, celkové množství zboží, které by mohlo být prodáno (resp. zakoupeno), za daného časového intervalu, za cenu, která nepřesahuje (resp. neklesá pod)  $p$  za jednotku.

---

<sup>1</sup>Walras vyvýjel teorii tržní rovnováhy v jeho knize *Éléments d' économie politique pure*.

# Some classical economic theory



**Postulát** V ekonomické rovnováze se obchoduje se zbožím za rovnovážnou cenu  $p_e$ .

# Burzy cenných papírů & zbožové burzy & order book

Na světových burzách se obchoduje se zbožím pomocí takzvaného *order book* (seznam objednávek).

V order booku je napsán seznam nabídek buď ke koupi nebo k prodeji určitého množství zboží za určitou cenu. Obchodníci, kteří přicházejí na burzu mají dvě možnosti.

- ▶ Vykonat **market order**, t.j., *kupovat (buy market order)* či *prodat (sell market order)*  $n$  jednotek zboží za nejlepší dostupnou cenu v order booku.

# Burzy cenných papírů & zbožové burzy & order book

Na světových burzách se obchoduje se zbožím pomocí takzvaného **order book** (seznam objednávek).

V order booku je napsán seznam nabídek buď ke koupi nebo k prodeji určitého množství zboží za určitou cenu. Obchodníci, kteří přicházejí na burzu mají dvě možnosti.

- ▶ Vykonat **market order**, t.j., *kupovat (buy market order)* či *prodat (sell market order)*  $n$  jednotek zboží za nejlepší dostupnou cenu v order booku.
- ▶ Umístit **limit order**, t.j., napsat do order booku nabídku ke koupi (*buy limit order*) nebo k prodeji (*sell limit order*)  $n$  jednotek zboží za určitou cenu  $p$ .

# Burzy cenných papírů & zbožové burzy & order book

Na světových burzách se obchoduje se zbožím pomocí takzvaného **order book** (seznam objednávek).

V order booku je napsán seznam nabídek buď ke koupi nebo k prodeji určitého množství zboží za určitou cenu. Obchodníci, kteří přicházejí na burzu mají dvě možnosti.

- ▶ Vykonat **market order**, t.j., *kupovat (buy market order)* či *prodat (sell market order)*  $n$  jednotek zboží za nejlepší dostupnou cenu v order booku.
- ▶ Umístit **limit order**, t.j., napsat do order booku nabídku ke koupi (*buy limit order*) nebo k prodeji (*sell limit order*)  $n$  jednotek zboží za určitou cenu  $p$ .

Přesný mechanismus, podle kterého jsou market ordery vyrovnaný s existujícími limit ordery, se může lišit.

## Luckockův model

Luckock (2003) (& znovu Plačková (2011)) znovu objevili následující model.

- ▶ Obchodníci přicházejí na trh v časech Poisonového procesu.

# Luckockův model

Luckock (2003) (& znovu Plačková (2011)) znovu objevili následující model.

- ▶ Obchodníci přicházejí na trh v časech Poisonového procesu.
- ▶ Každý obchodník chce buď *prodat* nebo *koupit* přesně jednu jednotku daného zboží.

# Luckockův model

Luckock (2003) (& znovu Plačková (2011)) znovu objevili následující model.

- ▶ Obchodníci přicházejí na trh v časech Poisonového procesu.
- ▶ Každý obchodník chce buď *prodat* nebo *koupit* přesně jednu jednotku daného zboží.
- ▶ Každý obchodník má *minimální prodejní cenu* nebo *maximální kupní cenu*.

# Luckockův model

Luckock (2003) (& znovu Plačková (2011)) znovu objevili následující model.

- ▶ Obchodníci přicházejí na trh v časech Poisonového procesu.
- ▶ Každý obchodník chce buď *prodat* nebo *koupit* přesně jednu jednotku daného zboží.
- ▶ Každý obchodník má *minimální prodejní cenu* nebo *maximální kupní cenu*.
- ▶ Obchodníci, kteří chtějí prodat (koupit) za nejméně (maximálně)  $p$  přicházejí s Poissonovou intensitou  $\mu_- = -d\lambda_-$  ( $\mu_+ = d\lambda_+$ ).

# Luckockův model

Luckock (2003) (& znovu Plačková (2011)) znovu objevili následující model.

- ▶ Obchodníci přicházejí na trh v časech Poisonového procesu.
- ▶ Každý obchodník chce buď *prodat* nebo *koupit* přesně jednu jednotku daného zboží.
- ▶ Každý obchodník má *minimální prodejní cenu* nebo *maximální kupní cenu*.
- ▶ Obchodníci, kteří chtějí prodat (koupit) za nejméně (maximálně)  $p$  přicházejí s Poissonovou intensitou  $\mu_- = -d\lambda_-$  ( $\mu_+ = d\lambda_+$ ).
- ▶ Pokud order book obsahuje vhodný limit order, obchodník vykoná *market order*, t.j., prodá tomu, kdo nabízí nejvíce, nebo koupí od toho, kdo nabízí za nejnižší cenu.

# Luckockův model

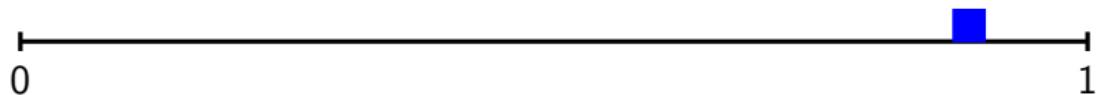
Luckock (2003) (& znovu Plačková (2011)) znovu objevili následující model.

- ▶ Obchodníci přicházejí na trh v časech Poisonového procesu.
- ▶ Každý obchodník chce buď *prodat* nebo *koupit* přesně jednu jednotku daného zboží.
- ▶ Každý obchodník má *minimální prodejní cenu* nebo *maximální kupní cenu*.
- ▶ Obchodníci, kteří chtějí prodat (koupit) za nejméně (maximálně)  $p$  přicházejí s Poissonovou intensitou  $\mu_- = -d\lambda_-$  ( $\mu_+ = d\lambda_+$ ).
- ▶ Pokud order book obsahuje vhodný limit order, obchodník vykoná *market order*, t.j., prodá tomu, kdo nabízí nejvíce, nebo koupí od toho, kdo nabízí za nejnižší cenu.
- ▶ Pokud order book neobsahuje vhodný limit order obchodník sám umístí limit order za jeho minimální cenu k prodeji nebo maximální cenu ke koupi.

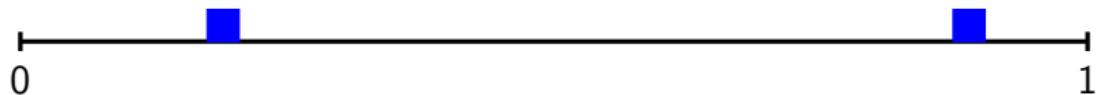
# Numerická simulace



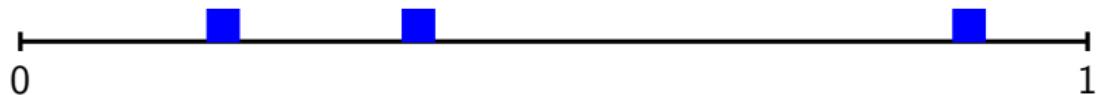
# Numerická simulace



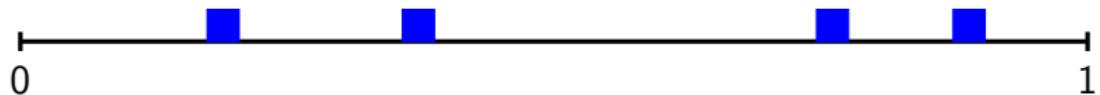
# Numerická simulace



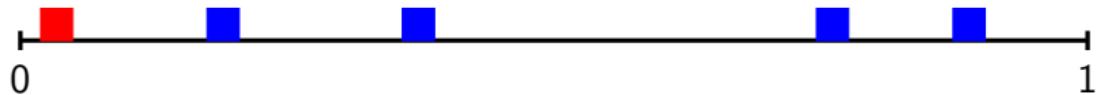
# Numerická simulace



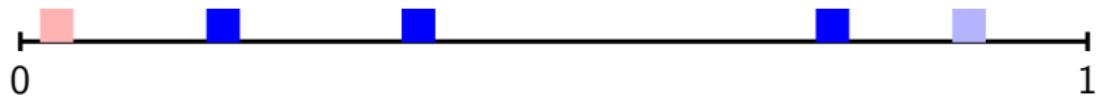
# Numerická simulace



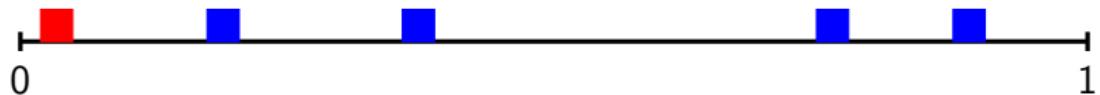
# Numerická simulace



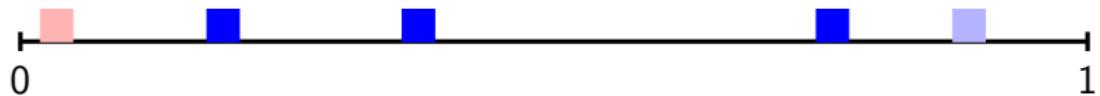
# Numerická simulace



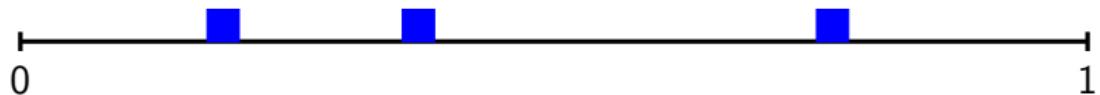
# Numerická simulace



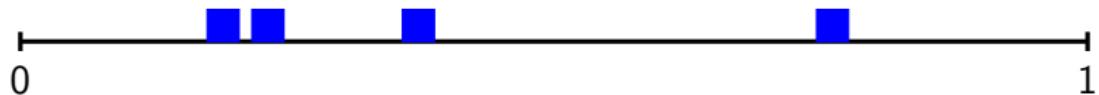
# Numerická simulace



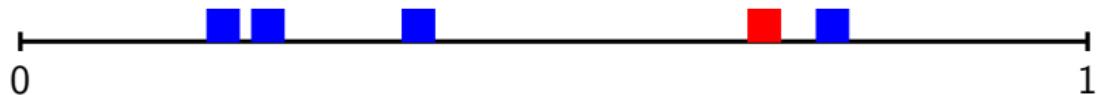
# Numerická simulace



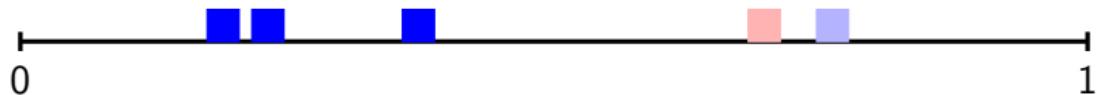
# Numerická simulace



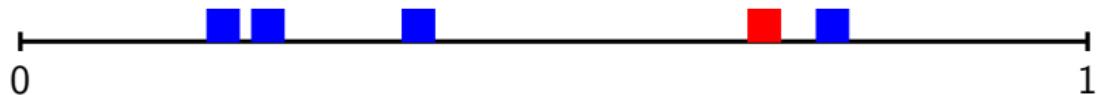
# Numerická simulace



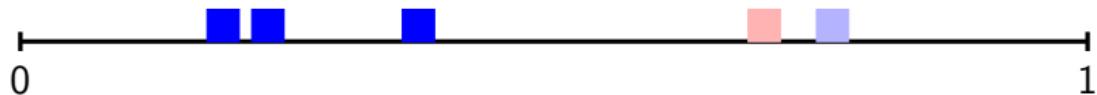
# Numerická simulace



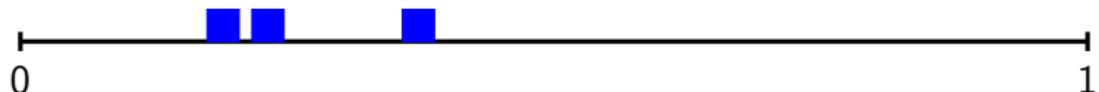
# Numerická simulace



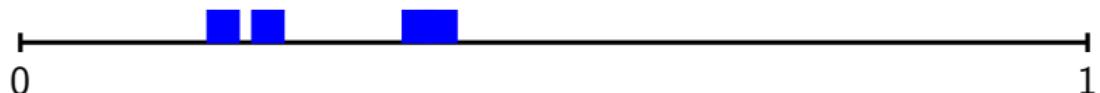
# Numerická simulace



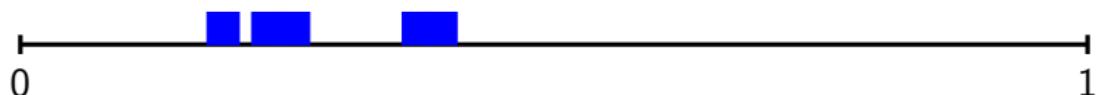
# Numerická simulace



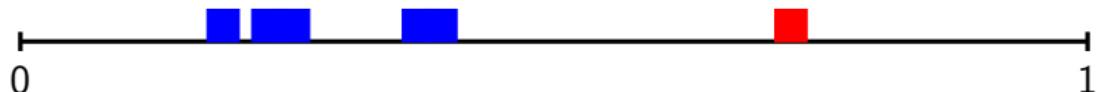
# Numerická simulace



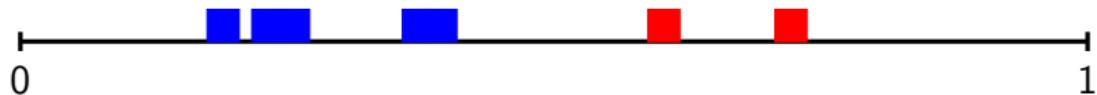
# Numerická simulace



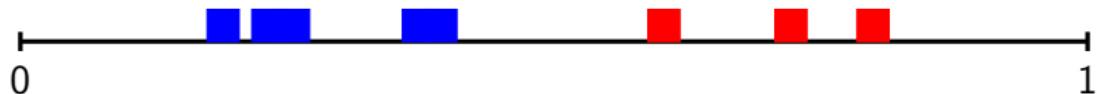
# Numerická simulace



# Numerická simulace



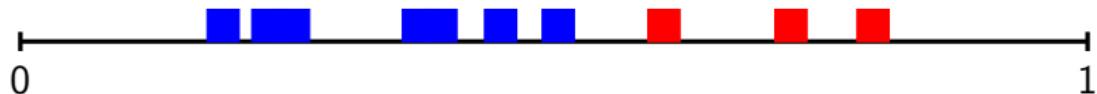
# Numerická simulace



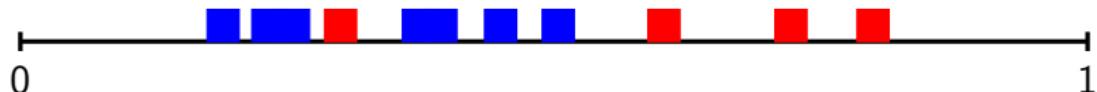
# Numerická simulace



# Numerická simulace



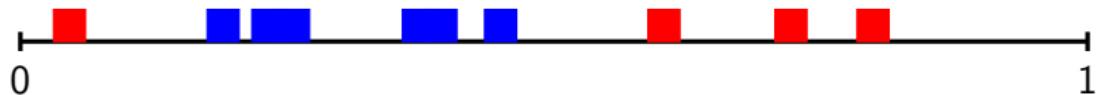
# Numerická simulace



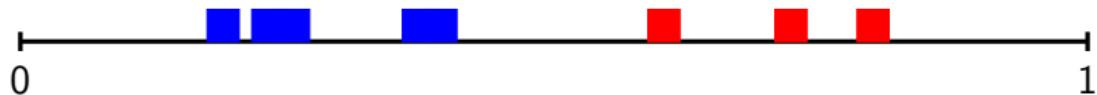
# Numerická simulace



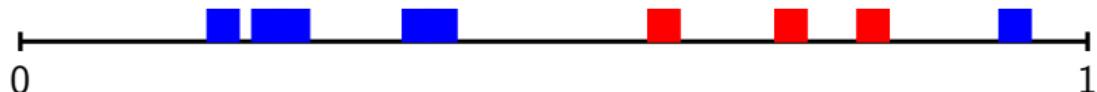
# Numerická simulace



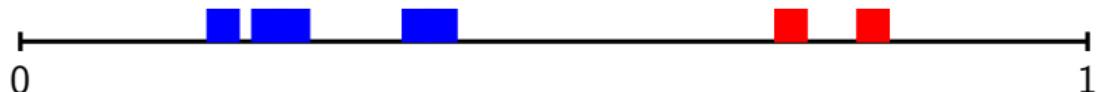
# Numerická simulace



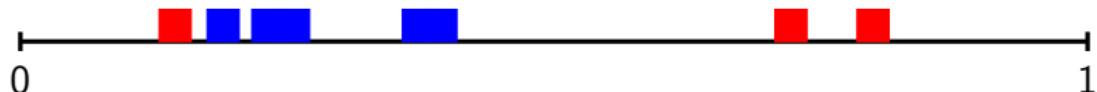
# Numerická simulace



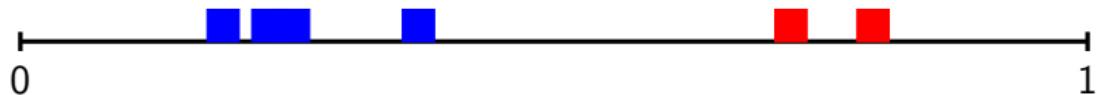
# Numerická simulace



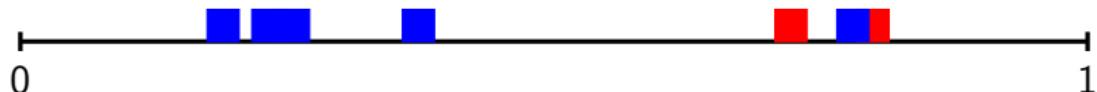
# Numerická simulace



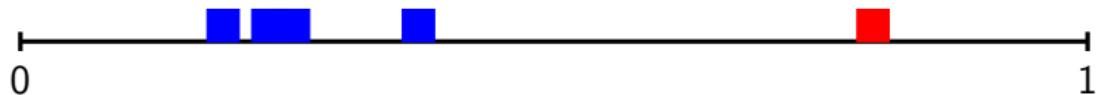
# Numerická simulace



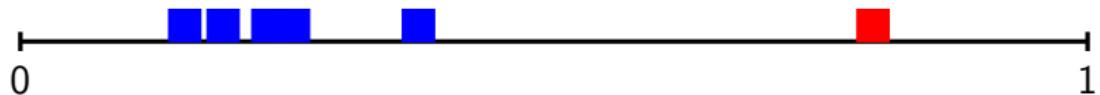
# Numerická simulace



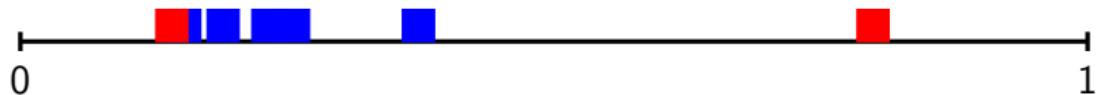
# Numerická simulace



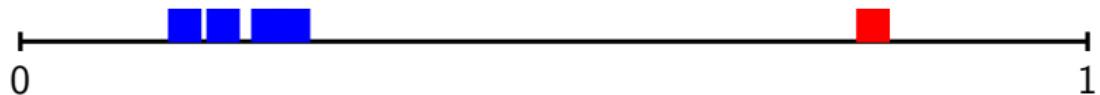
# Numerická simulace



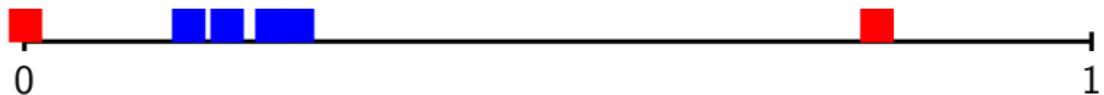
# Numerická simulace



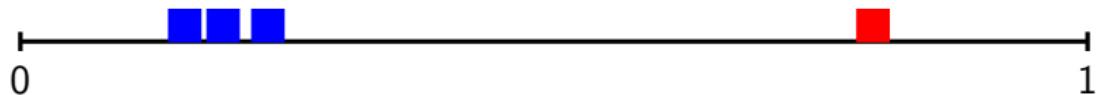
# Numerická simulace



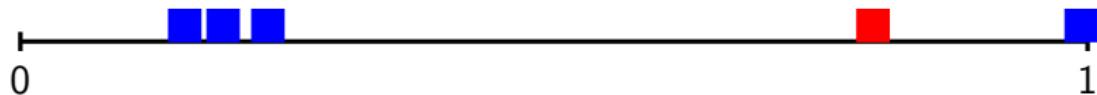
# Numerická simulace



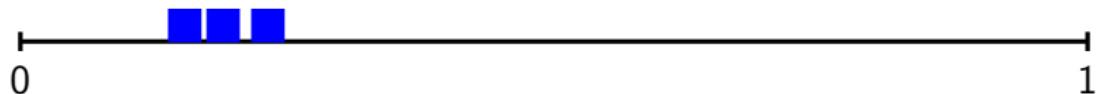
# Numerická simulace



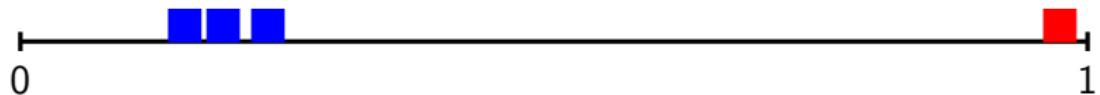
# Numerická simulace



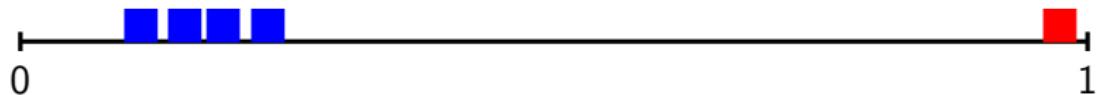
# Numerická simulace



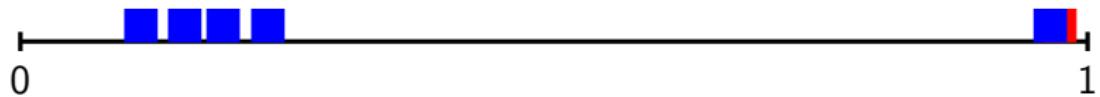
# Numerická simulace



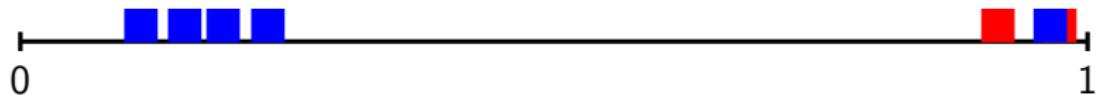
# Numerická simulace



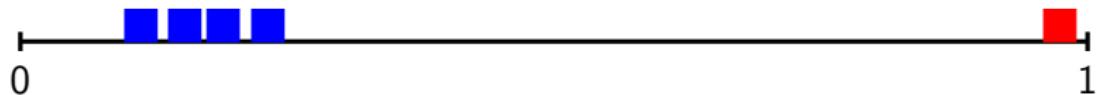
# Numerická simulace



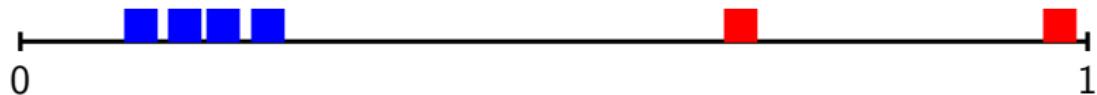
# Numerická simulace



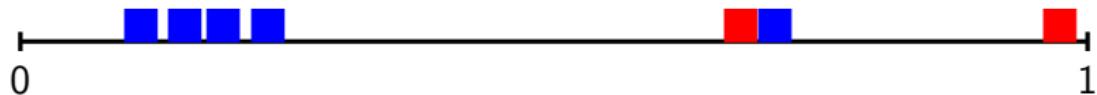
# Numerická simulace



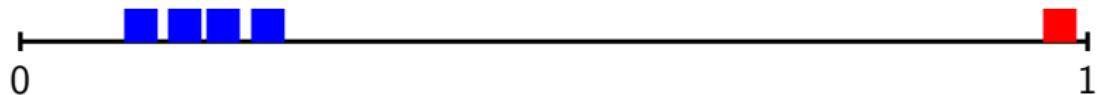
# Numerická simulace



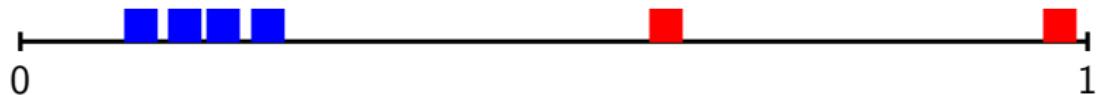
# Numerická simulace



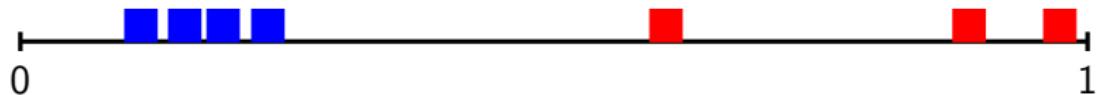
# Numerická simulace



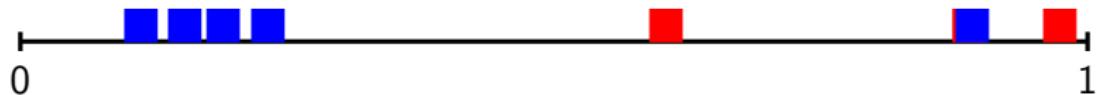
# Numerická simulace



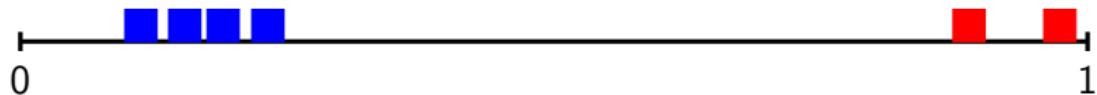
# Numerická simulace



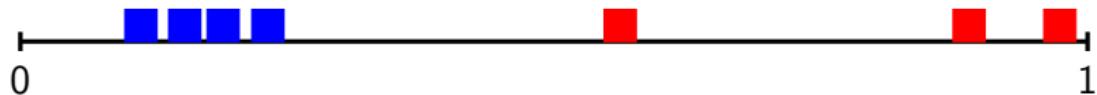
# Numerická simulace



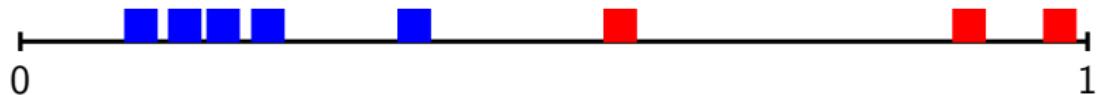
# Numerická simulace



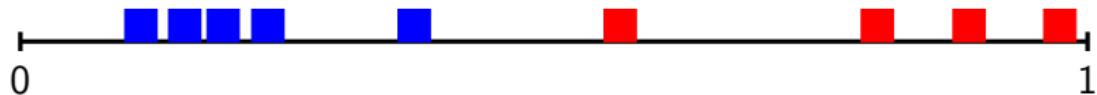
# Numerická simulace



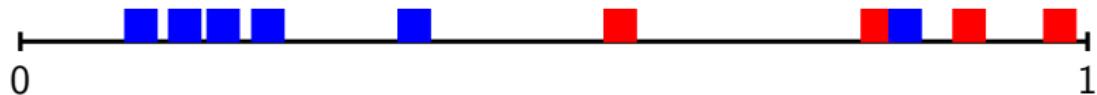
# Numerická simulace



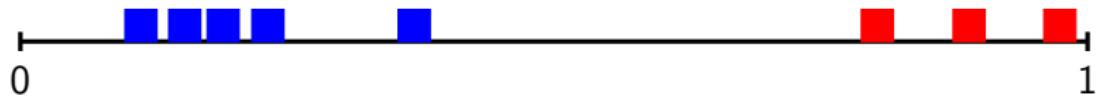
# Numerická simulace



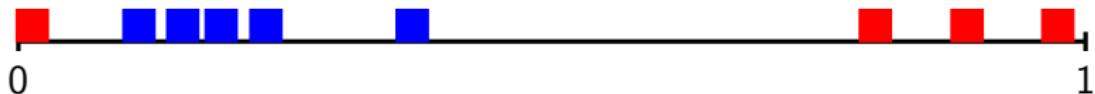
# Numerická simulace



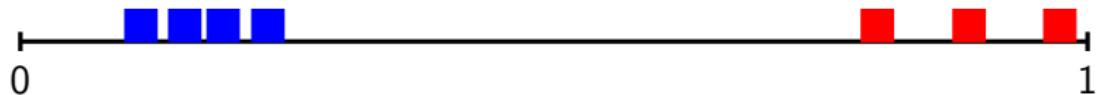
# Numerická simulace



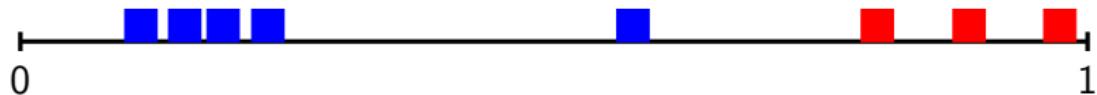
# Numerická simulace



# Numerická simulace



# Numerická simulace

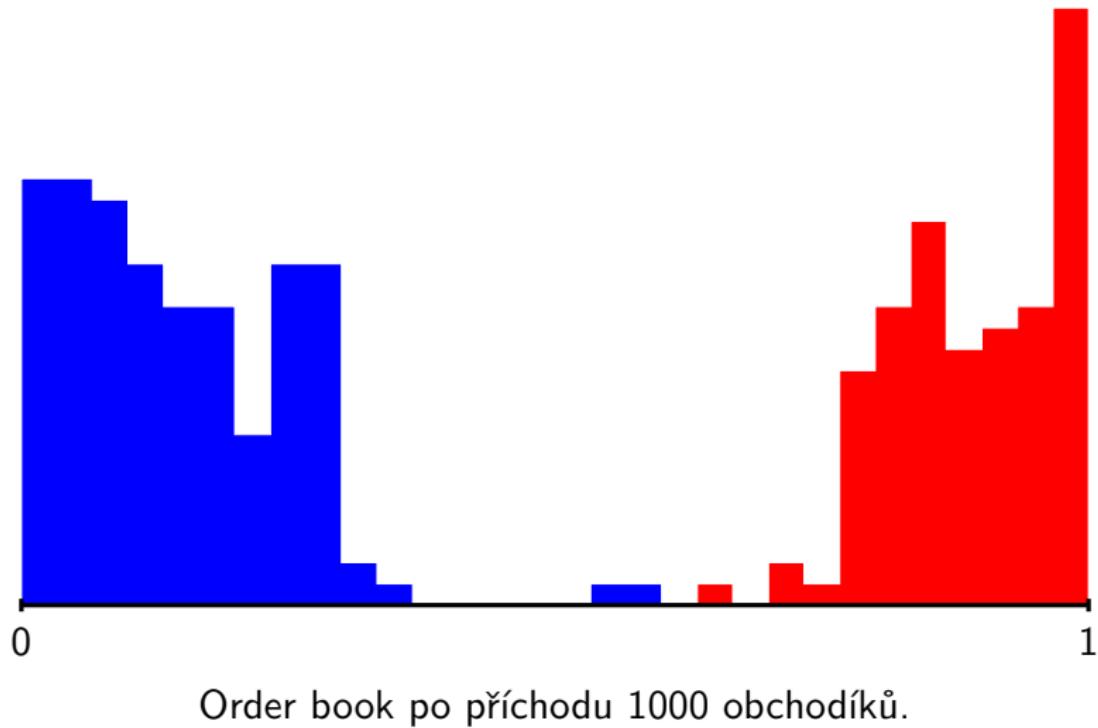


# Numerická simulace

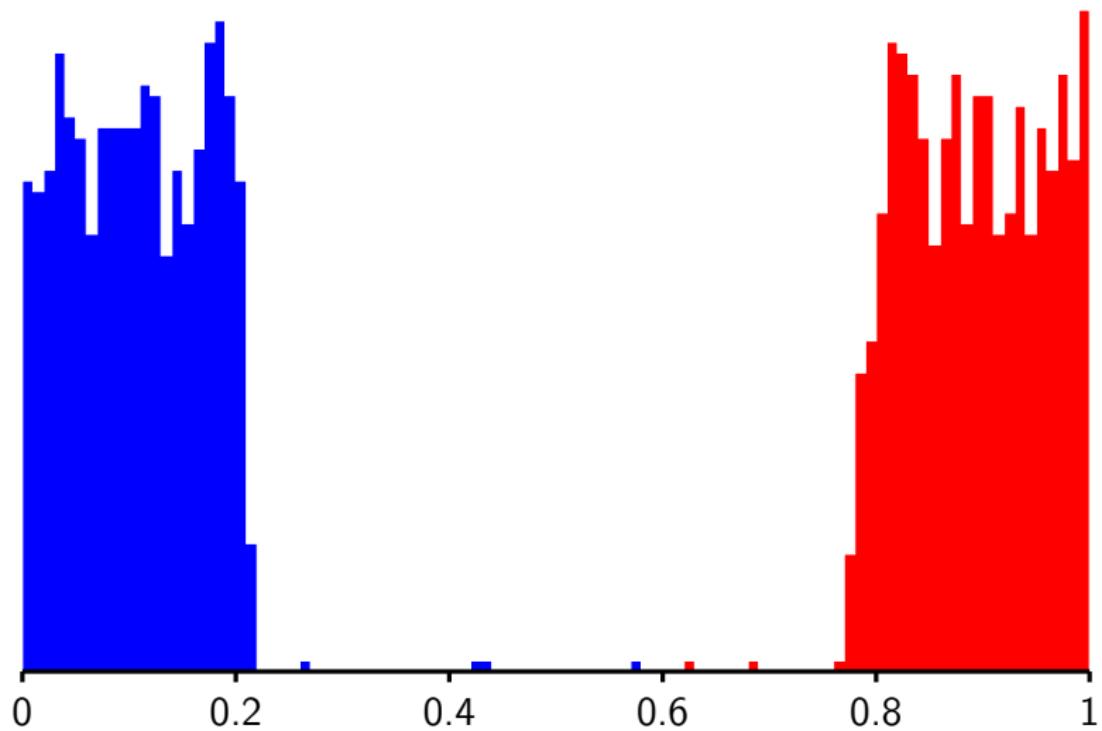


Order book po příchodu 100 obchodíků.

# Numerická simulace



# Numerická simulace



Order book po příchodu 10.000 obchodíků.

# Stigler's model

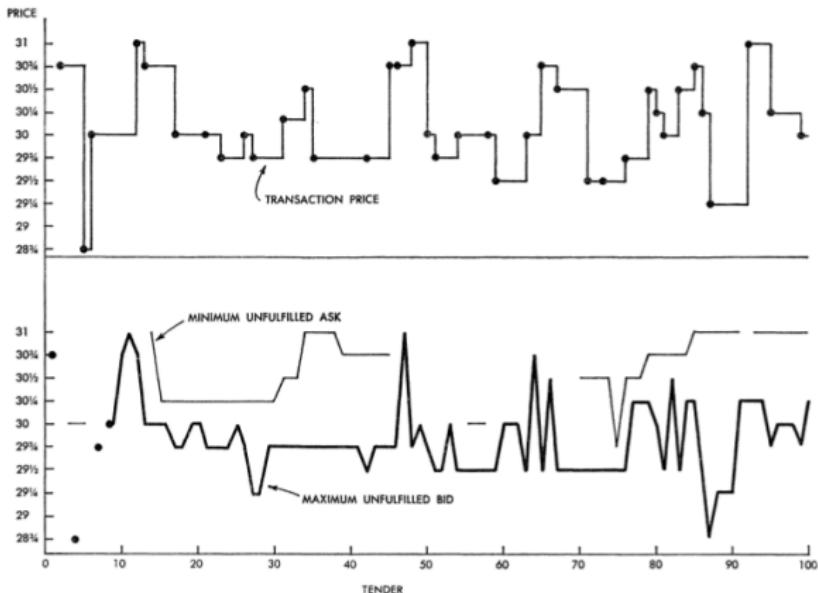
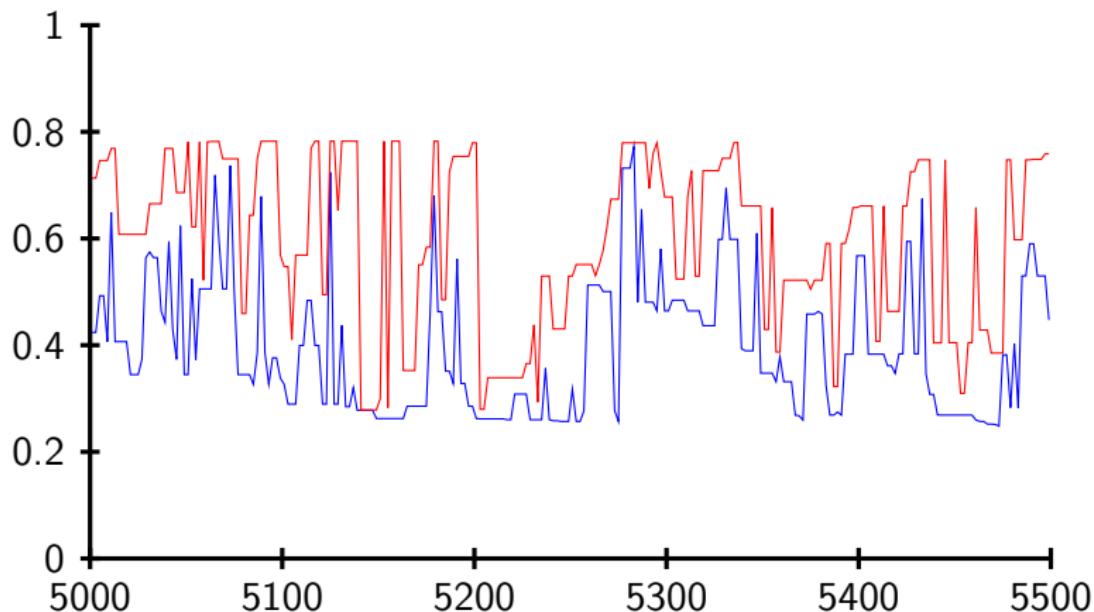


FIG. 1.—Hypothetical sequence of transaction prices, generated by sequence of random numbers, and maximum unfulfilled bid and minimum unfulfilled ask prices (equilibrium price of 29½ or 30).

Už Stigler (1964) simuloval stejný model, kde  $\mu_- = \mu_+$  je uniformní rozdělení na 10ti možných cenách.

# Numerická simulace



Evoluce ceny nejlepších nadídek a poptávek mezi příchodem  
5000ého a 5500ého obchodníka.

**To by se Walrasovi nelíbilo.**

## To by se Walrasovi nelíbilo.

Teoretická rovnovážná cena  $p_e = 0.5$  nikdy není dosažena.

## To by se Walrasovi nelíbilo.

Teoretická rovnovážná cena  $p_e = 0.5$  nikdy není dosažena.

Existují "magická" čísla  $q_{\min} \approx 0.2177(2)$  a  $q_{\max} = 1 - q_{\min}$  taková, že

## To by se Walrasovi nelíbilo.

Teoretická rovnovážná cena  $p_e = 0.5$  nikdy není dosažena.

Existují "magická" čísla  $q_{\min} \approx 0.2177(2)$  a  $q_{\max} = 1 - q_{\min}$  taková, že

- ▶ Poptávky za cenu nižší než  $q_{\min}$  nikdy nejsou vyrovnaný.

## To by se Walrasovi nelíbilo.

Teoretická rovnovážná cena  $p_e = 0.5$  nikdy není dosažena.

Existují "magická" čísla  $q_{\min} \approx 0.2177(2)$  a  $q_{\max} = 1 - q_{\min}$  taková, že

- ▶ Poptávky za cenu nižší než  $q_{\min}$  nikdy nejsou vyrovnaný.
- ▶ Nabídky nad  $q_{\max}$  nikdy nejsou vyrovnaný.

## To by se Walrasovi nelíbilo.

Teoretická rovnovážná cena  $p_e = 0.5$  nikdy není dosažena.

Existují "magická" čísla  $q_{\min} \approx 0.2177(2)$  a  $q_{\max} = 1 - q_{\min}$  taková, že

- ▶ Poptávky za cenu nižší než  $q_{\min}$  nikdy nejsou vyrovnaný.
- ▶ Nabídky nad  $q_{\max}$  nikdy nejsou vyrovnaný.
- ▶ Ceny nejlepší poptávky a nabídky se nadále pohybují mezi  $q_{\min}$  a  $q_{\max}$ .

## To by se Walrasovi nelíbilo.

Teoretická rovnovážná cena  $p_e = 0.5$  nikdy není dosažena.

Existují "magická" čísla  $q_{\min} \approx 0.2177(2)$  a  $q_{\max} = 1 - q_{\min}$  taková, že

- ▶ Poptávky za cenu nižší než  $q_{\min}$  nikdy nejsou vyrovnaný.
- ▶ Nabídky nad  $q_{\max}$  nikdy nejsou vyrovnaný.
- ▶ Ceny nejlepší poptávky a nabídky se nadále pohybují mezi  $q_{\min}$  a  $q_{\max}$ .
- ▶ Mezera mezi nimi je veliká, většinu času.

# Kritický bod

Luckock má **vzorec** pro  $q_{\min}$  a  $q_{\max}$ .

Obzvlášť pro model na  $[0, 1]$ , přičemž  $\lambda_-(x) = 1 - x$  and  $\lambda_+(x) = x$ , Luckock tvrdí:  $q_{\min} := 1 + 1/z$ , kde  $z$  je jedinečné řešení rovnice  $1 + z + e^z = 0$ .

Numericky  $q_{\min} \approx 0.21781170571980$ .

Luckock toto tvrzení dokáže na základě následujících předpokladů:

- ▶ Model je stacionárný.
- ▶ Existují  $0 < q_{\min} < q_{\max} < 1$  tak, že poptávky (nabídky) pod  $q_{\min}$  (nad  $q_{\max}$ ) nikdy nejsou vyrovnaný.
- ▶ Všechny poptávky (nabídky) nad  $q_{\min}$  (pod  $q_{\max}$ ) jsou dříve nebo později vyrovnaný.

# Kritický bod

**Důkaz:** Nechť je  $M^\pm$  cena nejlepší nabídka ka koupi/prodeji. Do intervalu  $A \subset (q_{\min}, q_{\max})$  se připisují buy limit ordery stejně často, jak jsou z  $A$  odstraněny:

$$\int_A \mathbb{P}[M^- < x] \mu_+(dx) = \int_A \lambda_-(x) \mathbb{P}[M^+ \in dx].$$

Značujeme:

$$f_-(x) := \mathbb{P}[M^- < x] \quad \text{and} \quad f_+(x) := \mathbb{P}[M^+ > x].$$

Pak

$$(i) \quad f_- d\lambda_+ = -\lambda_- df_+,$$

$$(ii) \quad f_+ d\lambda_- = -\lambda_+ df_-.$$

Se správnými okrajovými podmínkami lze rovnici vyřešit jenom pro jednu volbu  $q_{\min}$  a  $q_{\max}$ .

## Otevřené problémy:

- ▶ Důkaz existence takového stacionárního rozdělení.
- ▶ Konvergence k stacionárnímu stavu při prázdném počátečním stavu.
- ▶ Rozdělení druhé nejlepší nabídky.
- ▶ Rozdělení vektoru  $(M^-, M^+)$ . (Zatím známe jenom jeho marginály.)

## Otevřené problémy:

- ▶ Důkaz existence takového stacionárního rozdělení.
- ▶ Konvergence k stacionárnímu stavu při prázdném počátečním stavu.
- ▶ Rozdělení druhé nejlepší nabídky.
- ▶ Rozdělení vektoru  $(M^-, M^+)$ . (Zatím známe jenom jeho marginály.)

*Pracuji na tom.*

## Market orders

We extend the model by adding traders who *always place a market order*, i.e.,

- ▶ With rate  $m_-$  (resp.  $m_+$ ), a trader arrives who takes the cheapest available offer (resp. sells to the highest bidder) in the order book, if there is one, and otherwise *does nothing*.

This is like a trader who wants to buy (resp. sell) at the highest (resp. lowest) possible price, except that if the order book contains no matching offer, no limit order is written down.

**Advantage:** is possible for the extended process to be *positive recurrent*.

## Valid solutions

Assume that  $m_{\pm} > 0$ . Then Luckock's differential equation

$$(i) \quad f_- d\lambda_+ = -\lambda_- df_+,$$

$$(ii) \quad f_+ d\lambda_- = -\lambda_+ df_-,$$

on an interval  $[I_-, I_+]$  has a unique solution such that  $f_-(I_+) = 1 = f_+(I_-)$ . If the process is positive recurrent, then

$$f_-(x) = \mathbb{P}[M^- < x] \quad \text{and} \quad f_+(x) = \mathbb{P}[M^+ > x],$$

so positive recurrence implies  $f_{\pm}(I_{\mp}) > 0$ .

**Proposition** Assume  $\lambda_-(I_-) \neq \lambda_+(I_+)$ . Then  $f_{\pm}(I_{\mp}) > 0$  implies positive recurrence.

# Valid solutions

Set

$$g_-(x) := \frac{1}{\lambda_-(I_+)} - \frac{1}{\lambda_-(x)} \quad \text{and} \quad g_+(x) := \frac{1}{\lambda_+(I_-)} - \frac{1}{\lambda_+(x)}.$$

Then

$$c := \int_{I_-}^{I_+} g_- \, dg_+ = - \int_{I_-}^{I_+} g_+ \, dg_-$$

measures how well buy and sell limit orders match up. If  $c = 0$  then buy and sell limit orders never match. If  $c = \|g_-\| \cdot \|g_+\|$ , then buy and sell limit orders always match.

If  $|\mu_-| < |\mu_+| + m_+$  and  $|\mu_+| < |\mu_-| + m_-$ , but  $|\mu_-| \geq m_+$  or  $|\mu_+| \geq m_-$ , then keeping  $|\mu_\pm|$  and  $m_\pm$  fixed but decreasing  $c$ , the system goes through a phase transition where it stops being positive recurrent.

## Podobné modely

- ▶ Modifikace Barabásiového modelu hromadné obsluhy (2005) podle Gabrielli a Caldarelli (2007,2009).
- ▶ Dva modely pro vytvoření kanyonu.
- ▶ Modifikovaný Bak-Sneppenův model podle Meester & Sarkar (2012).

Všechny tyto modely obsahují pravidlo typu "zabijte nejnižší (případně nejvyšší) částici" a její chování (zřejmě) ukazuje *samo-organizovanou kritikalitu* (self-organized criticality).

# Model pro emailovou komunikaci

Inspirováni prací Barabási (2005), Gabrielli and Caldarelli (2007,2009) zavedli (více než méně) následující model pro emailovou komunikaci:

# Model pro emailovou komunikaci

Inspirováni prací Barabási (2005), Gabrielli and Caldarelli (2007,2009) zavedli (více než méně) následující model pro emailovou komunikaci:

Někdo dostává emaily podle Poissonového procesu s intensitou  $\lambda_{in}$  a odpovídá na emaily v časech Poissonového procesu s intensitou  $\lambda_{out}$ .

# Model pro emailovou komunikaci

Inspirováni prací Barabási (2005), Gabrielli and Caldarelli (2007,2009) zavedli (více než méně) následující model pro emailovou komunikaci:

Někdo dostává emaily podle Poissonového procesu s intensitou  $\lambda_{\text{in}}$  a odpovídá na emaily v časech Poissonového procesu s intensitou  $\lambda_{\text{out}}$ .

Realisticky,  $\lambda_{\text{in}} > \lambda_{\text{out}}$ .

# Model pro emailovou komunikaci

Inspirováni prací Barabási (2005), Gabrielli and Caldarelli (2007,2009) zavedli (více než méně) následující model pro emailovou komunikaci:

Někdo dostává emaily podle Poissonového procesu s intensitou  $\lambda_{in}$  a odpovídá na emaily v časech Poissonového procesu s intensitou  $\lambda_{out}$ .

Realisticky,  $\lambda_{in} > \lambda_{out}$ .

Příjemce přiřazuje každému emailu *prioritu*, a vždy odpovídá na email s nejvyšší prioritou v jeho doručených zprávách (nebo nedělá nic, pokud doručené zprávy nejsou).

# Model pro emailovou komunikaci

Inspirováni prací Barabási (2005), Gabrielli and Caldarelli (2007,2009) zavedli (více než méně) následující model pro emailovou komunikaci:

Někdo dostává emaily podle Poissonového procesu s intensitou  $\lambda_{in}$  a odpovídá na emaily v časech Poissonového procesu s intensitou  $\lambda_{out}$ .

Realisticky,  $\lambda_{in} > \lambda_{out}$ .

Příjemce přiřazuje každému emailu *prioritu*, a vždy odpovídá na email s nejvyšší prioritou v jeho doručených zprávách (nebo nedělá nic, pokud doručené zprávy nejsou).

Priority jsou nezávislé a stejně rozdělené se spojitou distribuční funkcí. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že jsou uniformě rozdělené na  $[-\lambda_{in}, 0]$ .

**Jednoduše se dokáže:** Na emaily, které mají prioritu pod  $-\lambda_{out}$ , po jistém čase už nebude odpovězeno, za to všechny emaily, které mají priority nad  $-\lambda_{out}$  dříve nebo později dostanou odpověď.

**Jednoduše se dokáže:** Na emaily, které mají prioritu pod  $-\lambda_{\text{out}}$ , po jistém čase už nebude odpovězeno, za to všechny emaily, které mají priority nad  $-\lambda_{\text{out}}$  dříve nebo později dostanou odpověď.

**Důkaz:** počet emailů s prioritou v  $[-\lambda, 0]$  tvoří Markovský proces, který skáče  $k \mapsto k + 1$  s intensitou  $\lambda$  and  $k \mapsto k - 1$  s intensitou  $\lambda_{\text{out}}1_{\{k>0\}}$ .

**Jednoduše se dokáže:** Na emaily, které mají prioritu pod  $-\lambda_{\text{out}}$ , po jistém čase už nebude odpovězeno, za to všechny emaily, které mají priority nad  $-\lambda_{\text{out}}$  dříve nebo později dostanou odpověď.

**Důkaz:** počet emailů s prioritou v  $[-\lambda, 0]$  tvoří Markovský proces, který skáče  $k \mapsto k + 1$  s intensitou  $\lambda$  and  $k \mapsto k - 1$  s intensitou  $\lambda_{\text{out}}1_{\{k>0\}}$ .

Tento Markovsky proces je pozitivní rekurentní pro  $\lambda < \lambda_{\text{out}}$ , nulový rekurentní pro  $\lambda = \lambda_{\text{out}}$ , a transientní pro  $\lambda > \lambda_{\text{out}}$ . ■

**Jednoduše se dokáže:** Na emaily, které mají prioritu pod  $-\lambda_{\text{out}}$ , po jistém čase už nebude odpovězeno, za to všechny emaily, které mají priority nad  $-\lambda_{\text{out}}$  dříve nebo později dostanou odpověď.

**Důkaz:** počet emailů s prioritou v  $[-\lambda, 0]$  tvoří Markovský proces, který skáče  $k \mapsto k + 1$  s intensitou  $\lambda$  and  $k \mapsto k - 1$  s intensitou  $\lambda_{\text{out}}1_{\{k>0\}}$ .

Tento Markovsky proces je positivní rekurentní pro  $\lambda < \lambda_{\text{out}}$ , nulový rekurentní pro  $\lambda = \lambda_{\text{out}}$ , a transientní pro  $\lambda > \lambda_{\text{out}}$ . ■

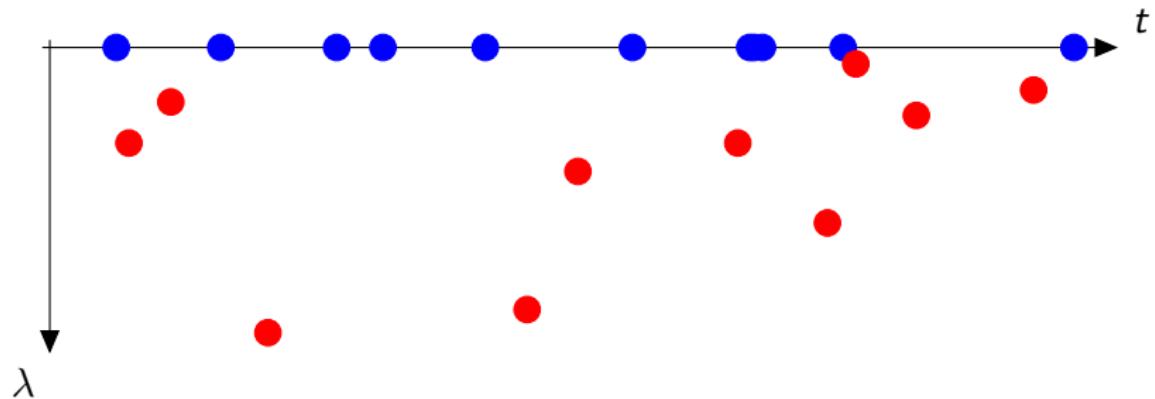
Kritické chování v bodě  $\lambda_{\text{out}}$ : intervaly mezi časy, kdy všechny emaily s prioritou nad  $\lambda_{\text{out}}$  už dostaly odpověď, mají rozdělení s těžkým chvostem, který odpadá jako záporná mocnina:  
 $\mathbb{P}[\tau \geq k] \sim k^{-1/2}$ .

# Poissonova konstrukce

Nechť je  $F_\lambda(t)$  počet emailů v doručených zprávách v čase  $t$ , které mají prioritu v  $[-\lambda, 0]$ .

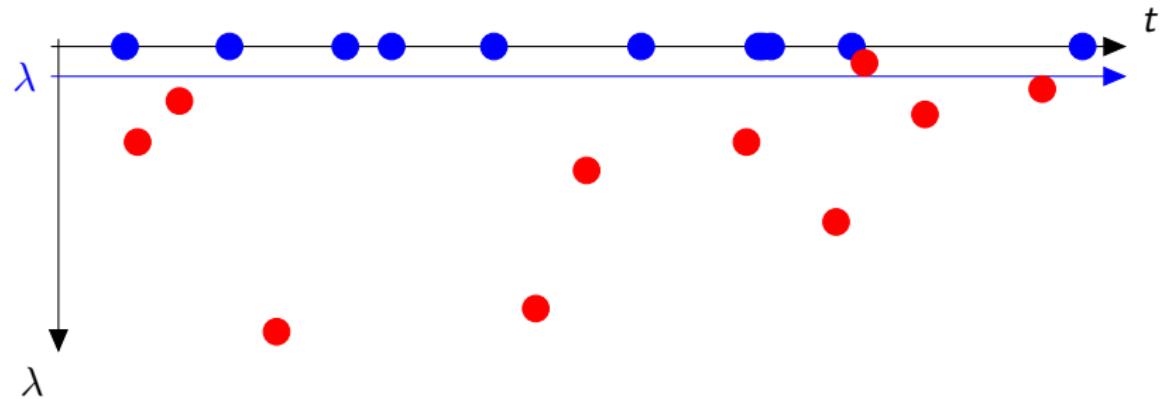
$F_\lambda(t)$  lze vyčíst z Poissonivých procesů, které popisují **příchozí nové emaily** a **časy, ve kterých je na emaily odpovězeno**.

# Poissonova konstrukce



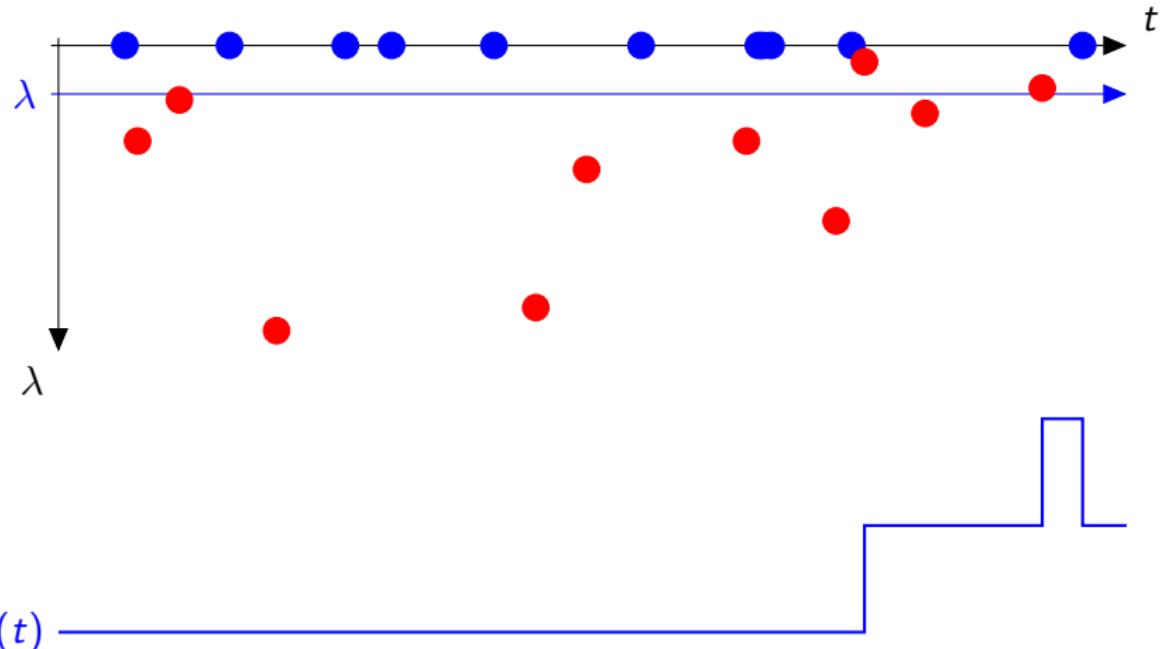
$$F_0(t)$$

# Poissonova konstrukce

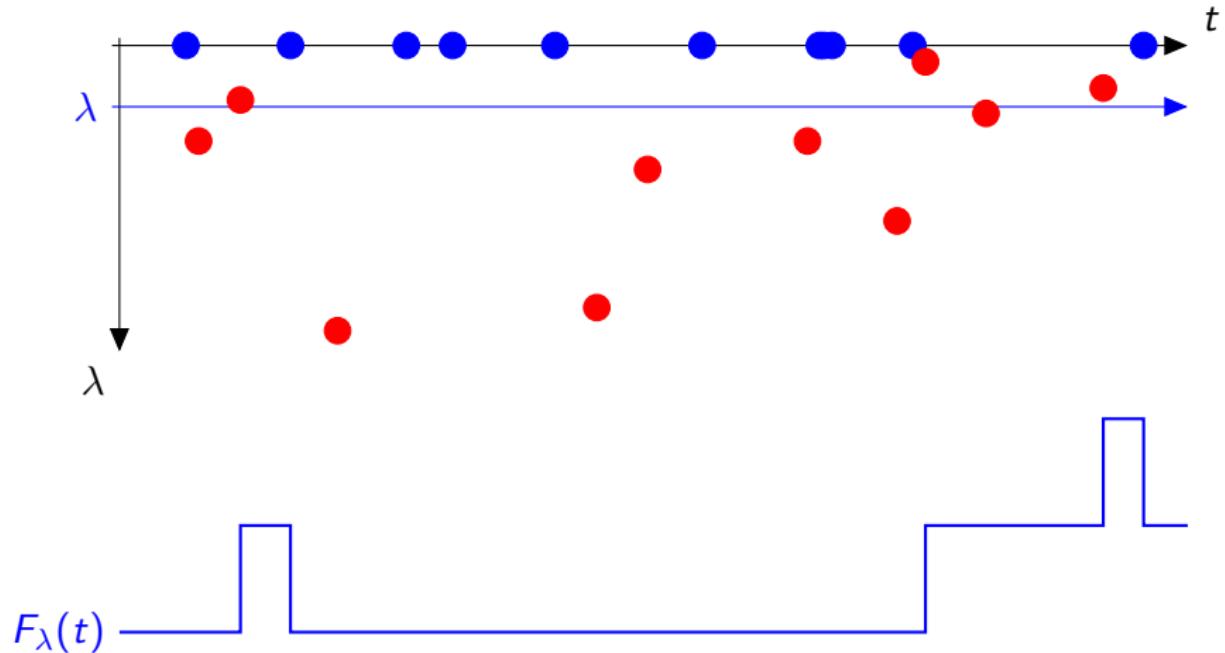


$$F_\lambda(t)$$

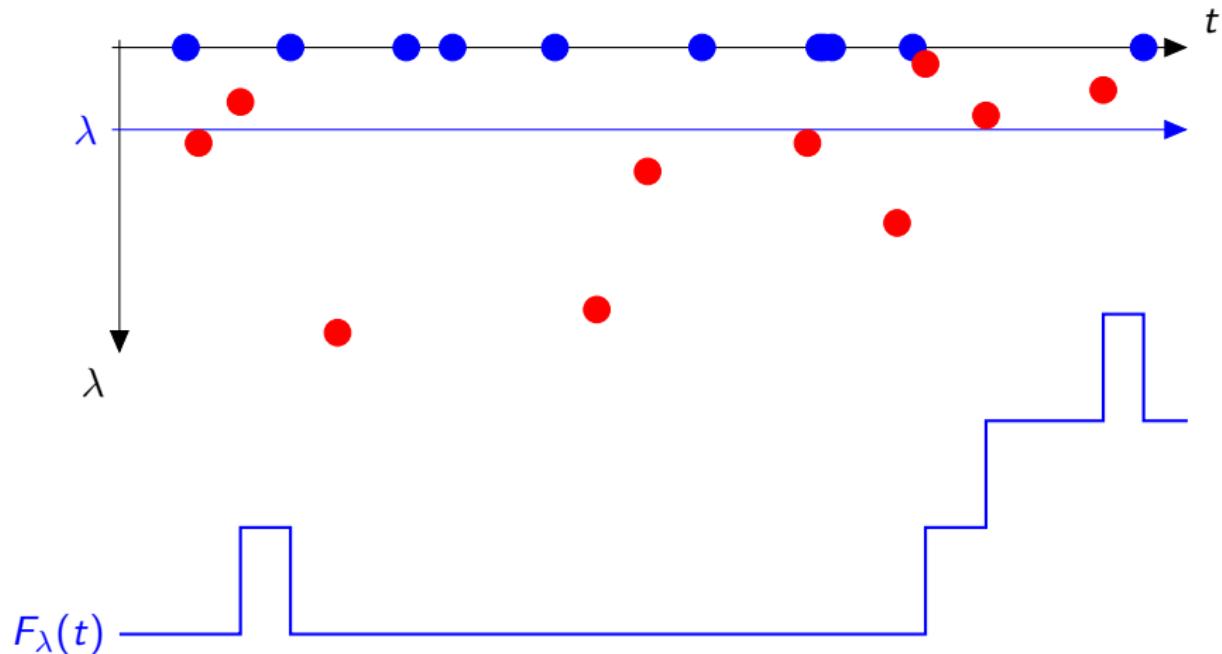
# Poissonova konstrukce



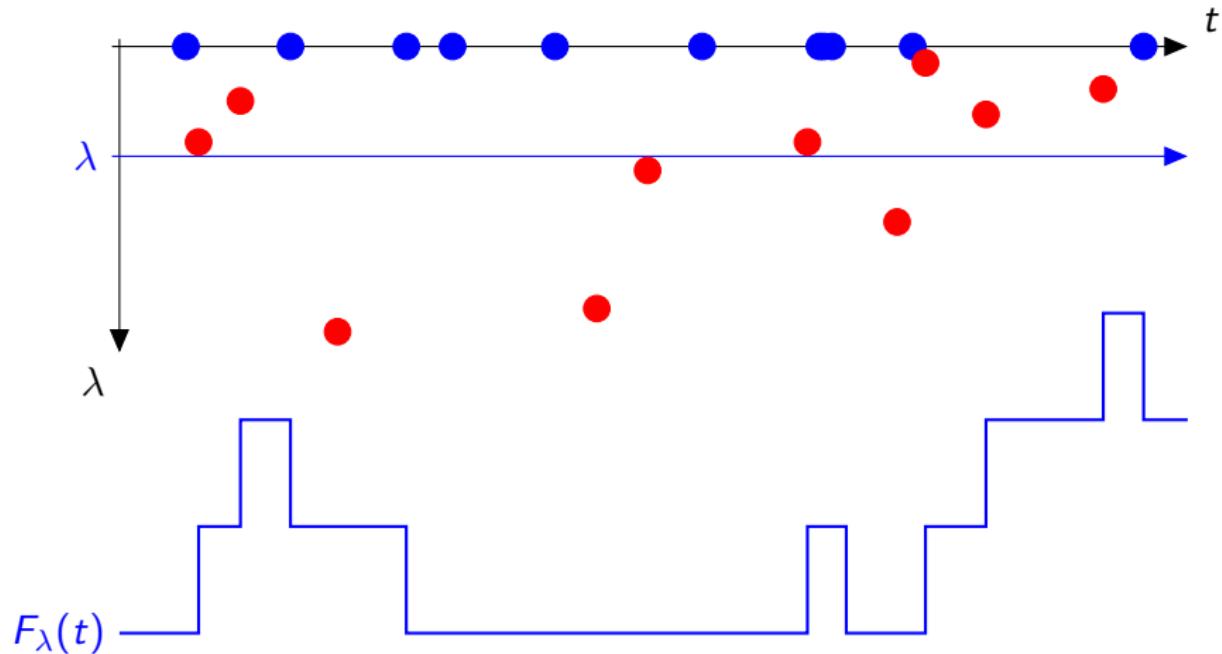
# Poissonova konstrukce



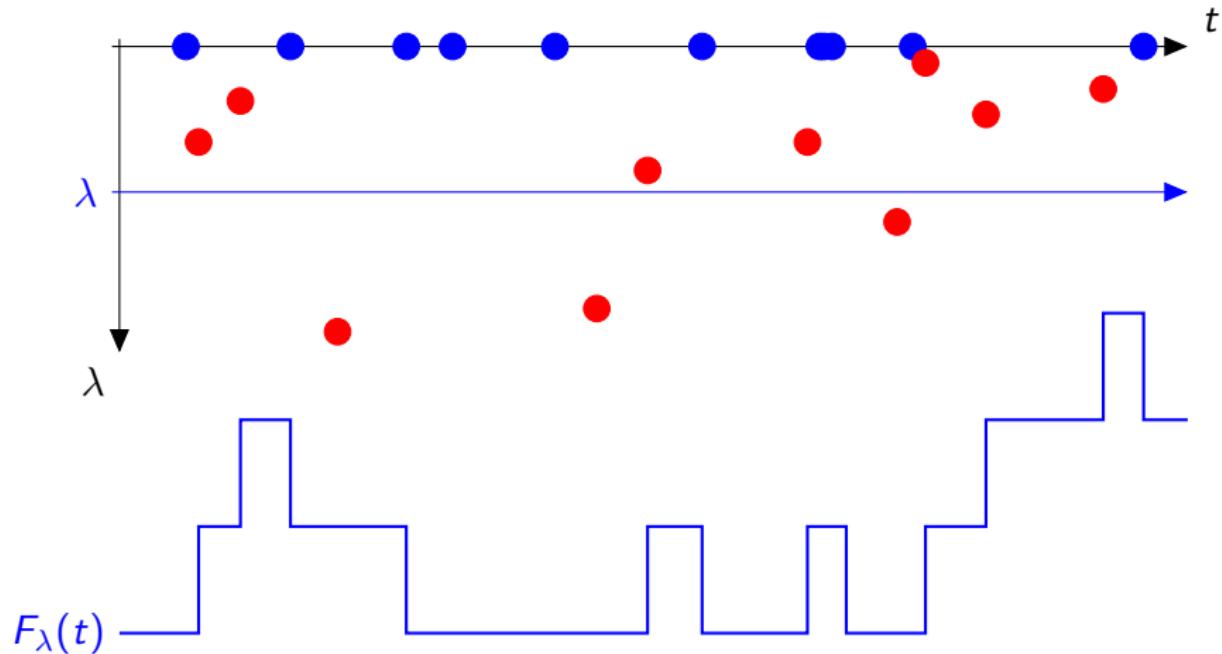
# Poissonova konstrukce



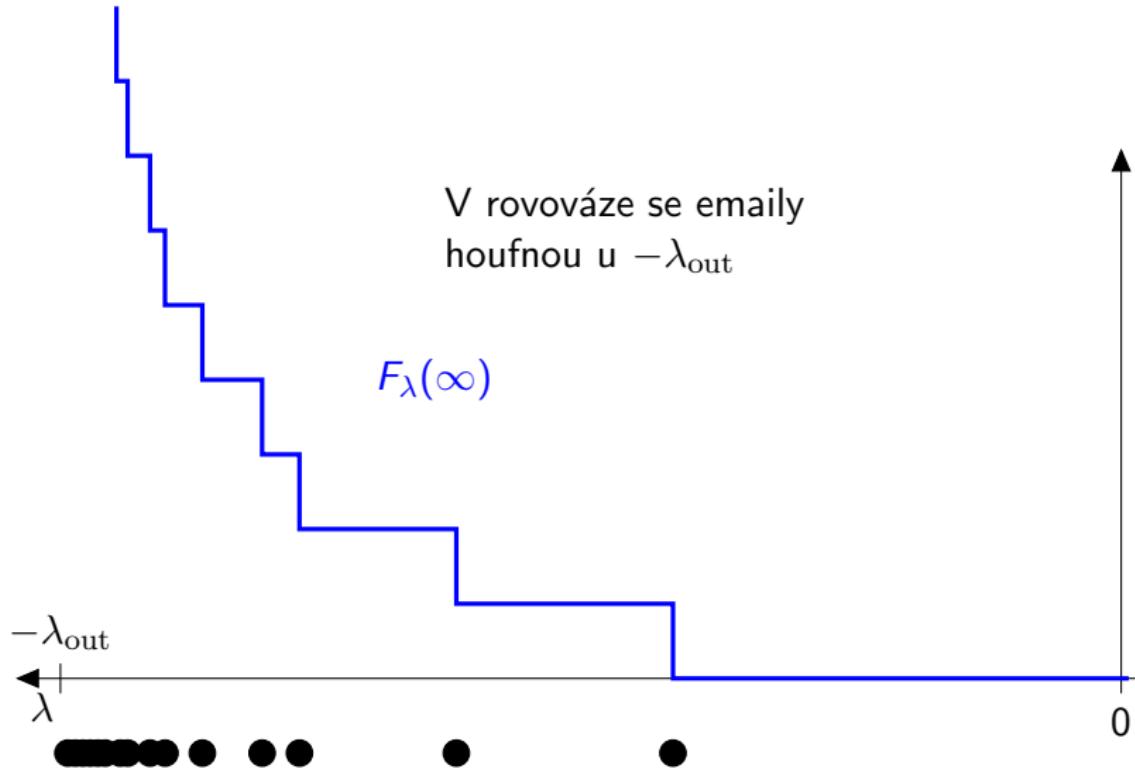
# Poissonova konstrukce



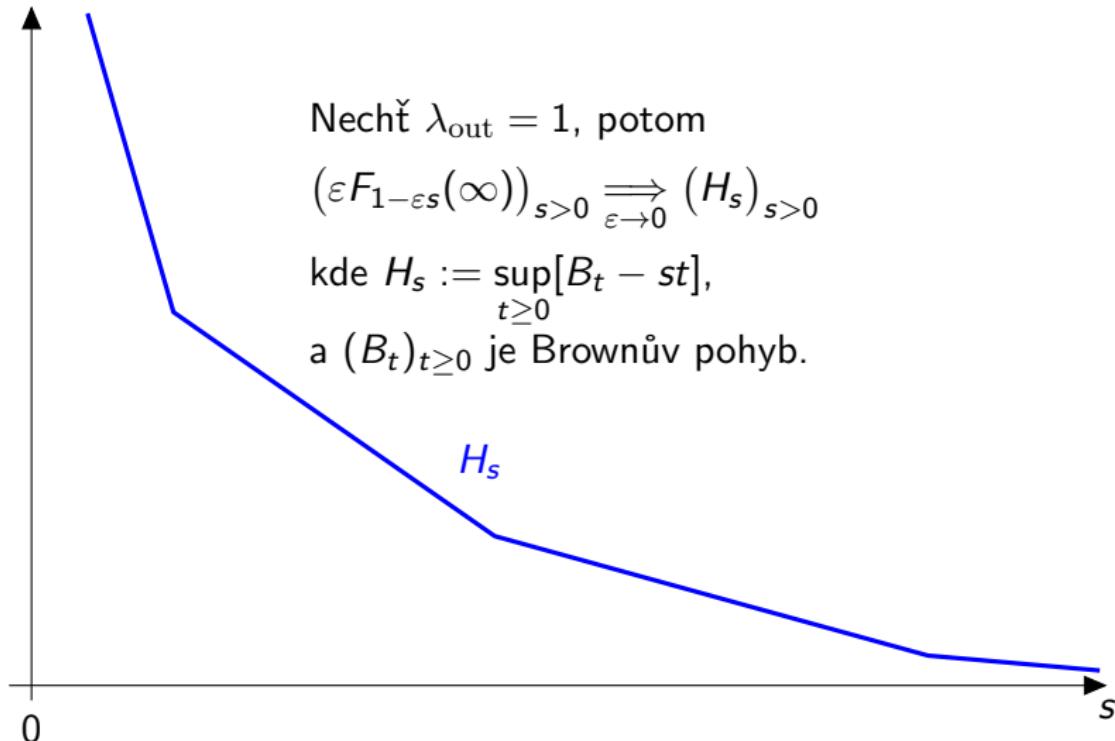
# Poissonova konstrukce



# Rovnovážné rozdělení

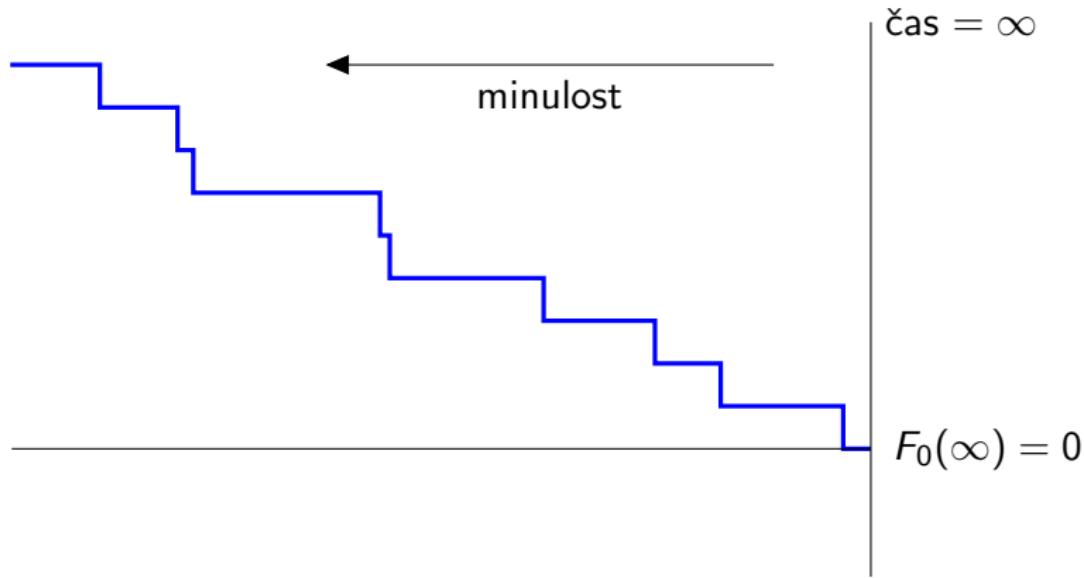


# Kritické chování

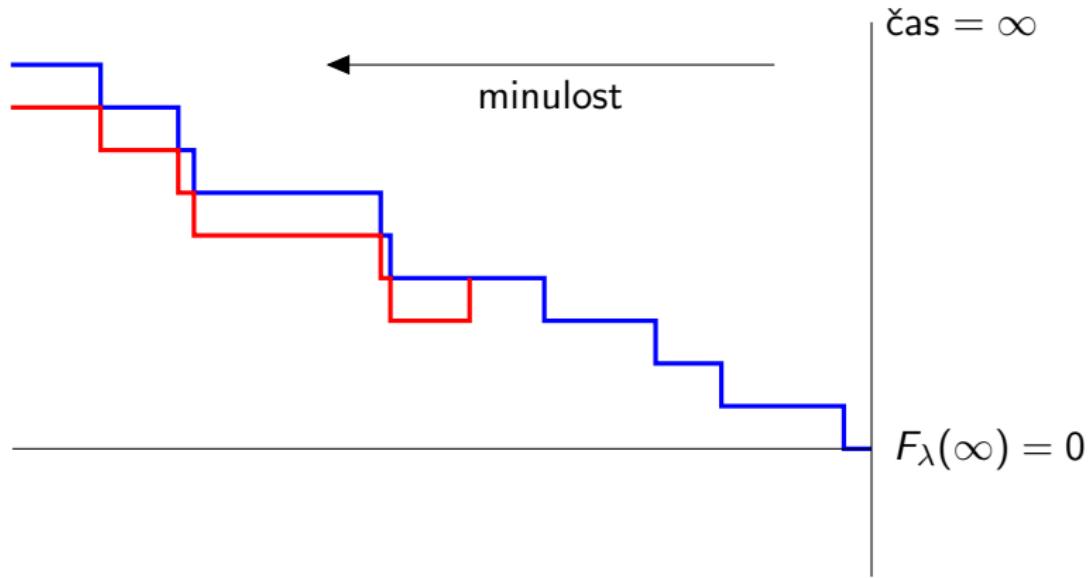


Groeneboom (1983): the concave majorant of Brownian motion.

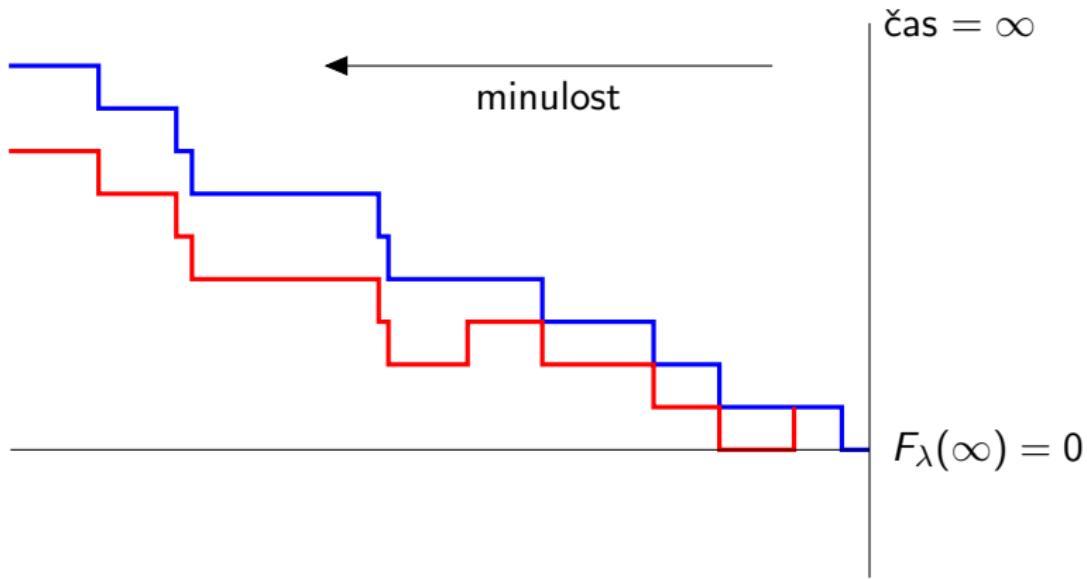
# Coupling from the past



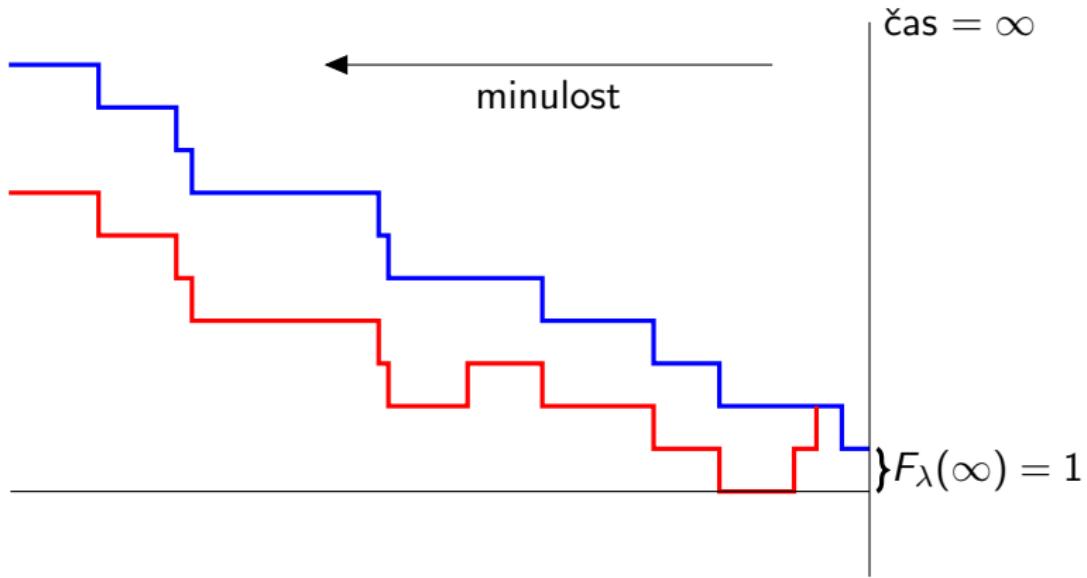
# Coupling from the past



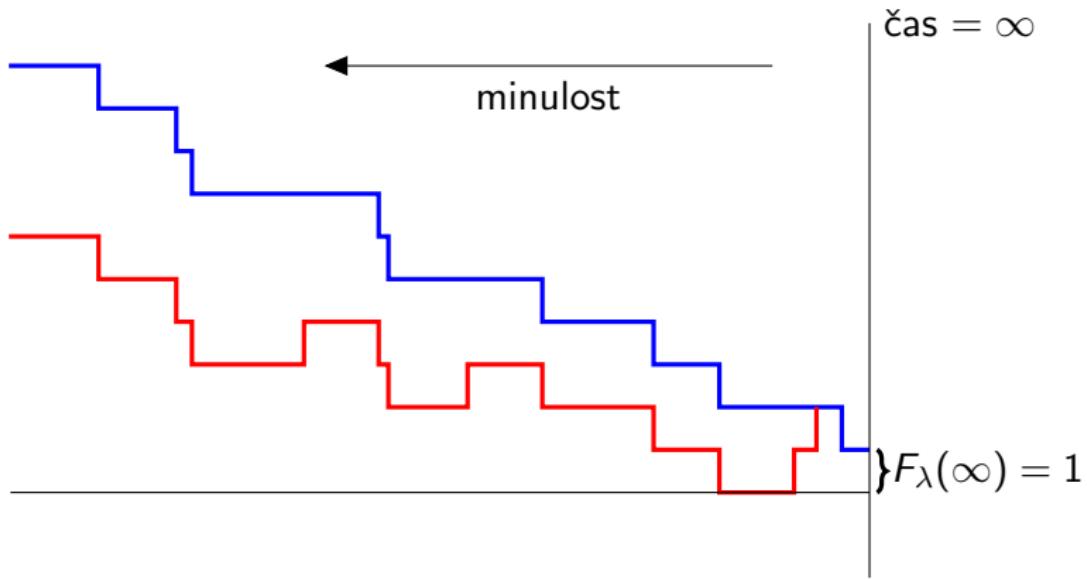
# Coupling from the past



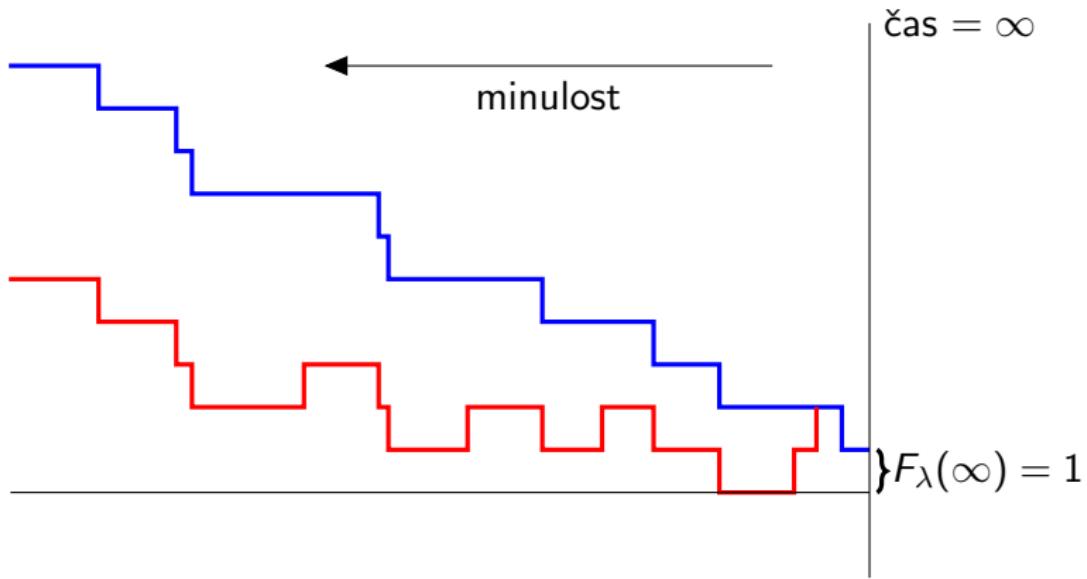
# Coupling from the past



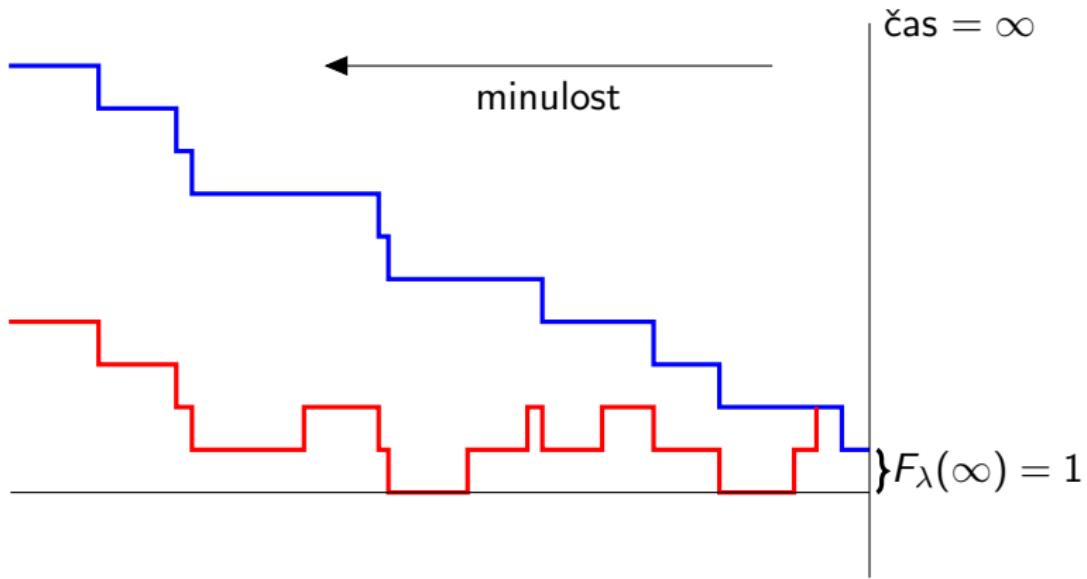
# Coupling from the past



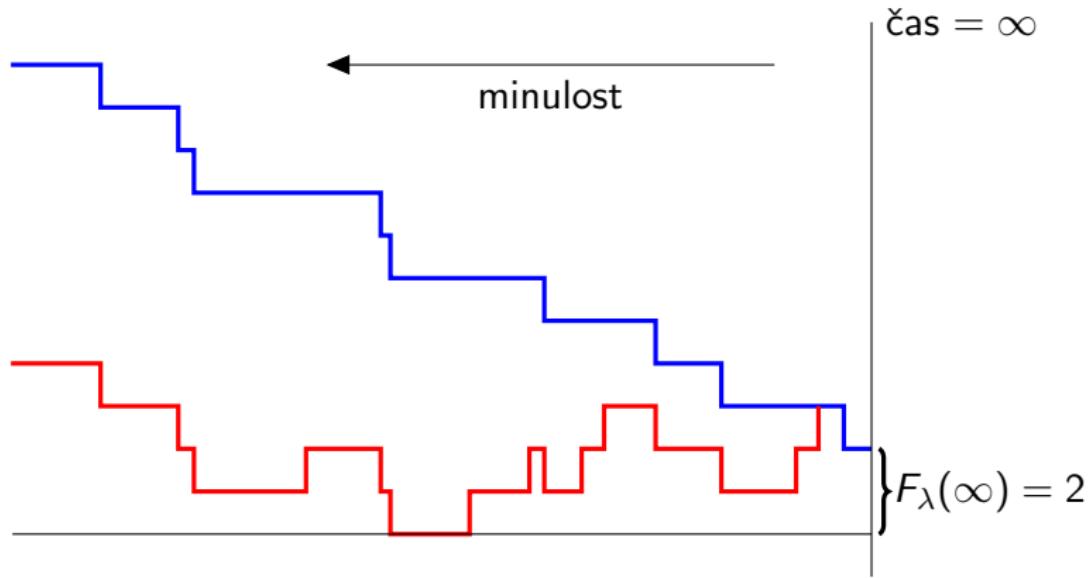
# Coupling from the past



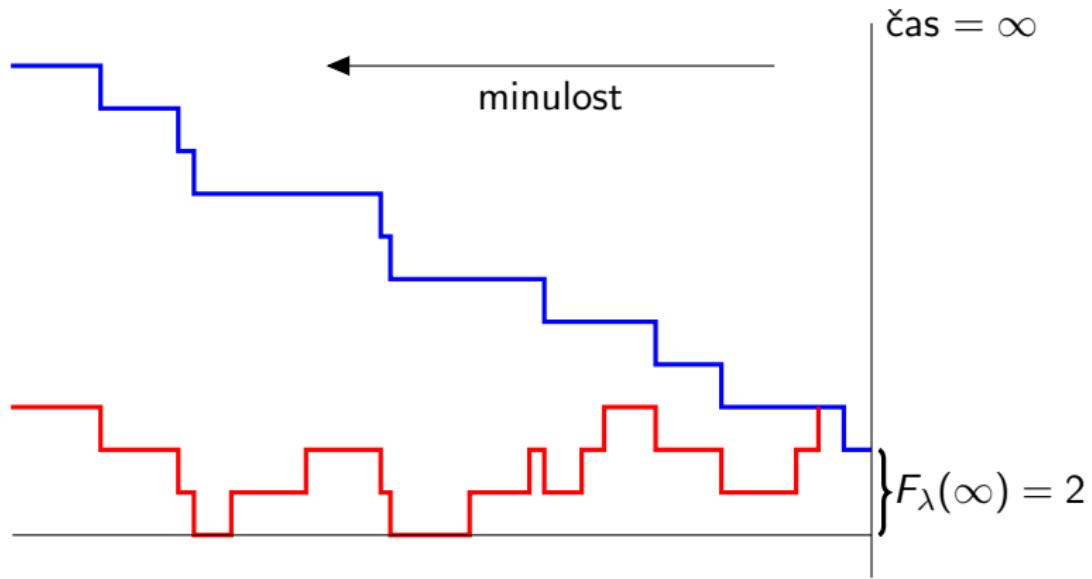
# Coupling from the past



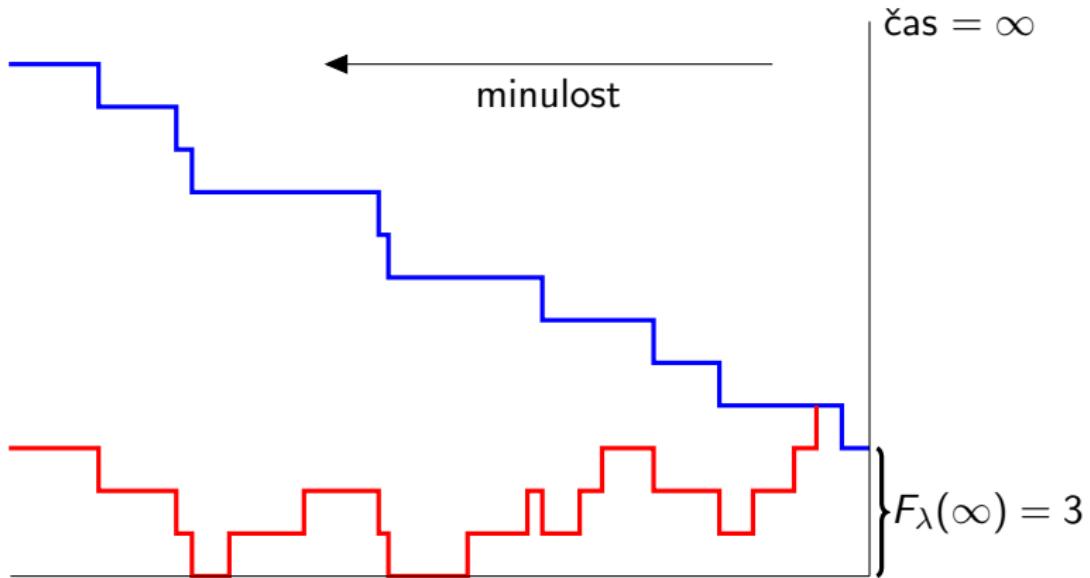
# Coupling from the past



# Coupling from the past



# Coupling from the past

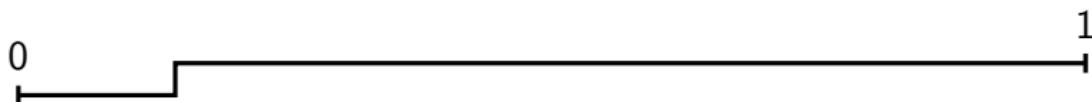


# Jednostranný model pro vytvoření kanyonu



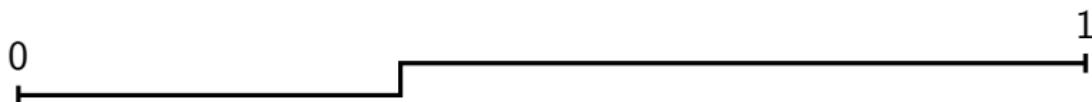
Vlevo teče řeka.

# Jednostranný model pro vytvoření kanyonu



Řeka budě prohlubuje koritu.

# Jednostranný model pro vytvoření kanyonu



Nebo břeh je erodován o jeden krok, od náhodně vybraného bodu.

# Jednostranný model pro vytvoření kanyonu



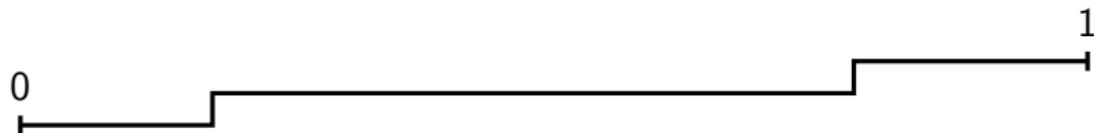
Nebo břeh je erodován o jeden krok, od náhodně vybraného bodu.

# Jednostranný model pro vytvoření kanyonu



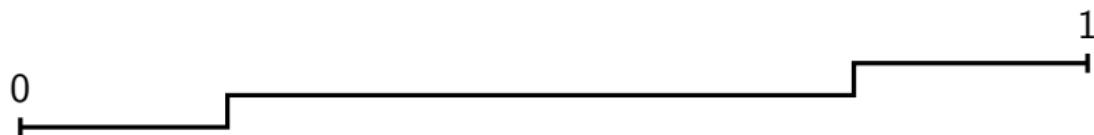
Nebo břeh je erodován o jeden krok, od náhodně vybraného bodu.

# Jednostranný model pro vytvoření kanyonu



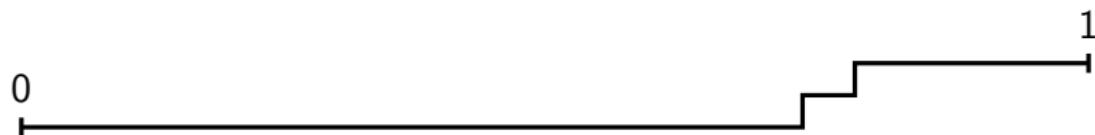
Budějme prohlubujeme koritu. . .

# Jednostranný model pro vytvoření kanyonu



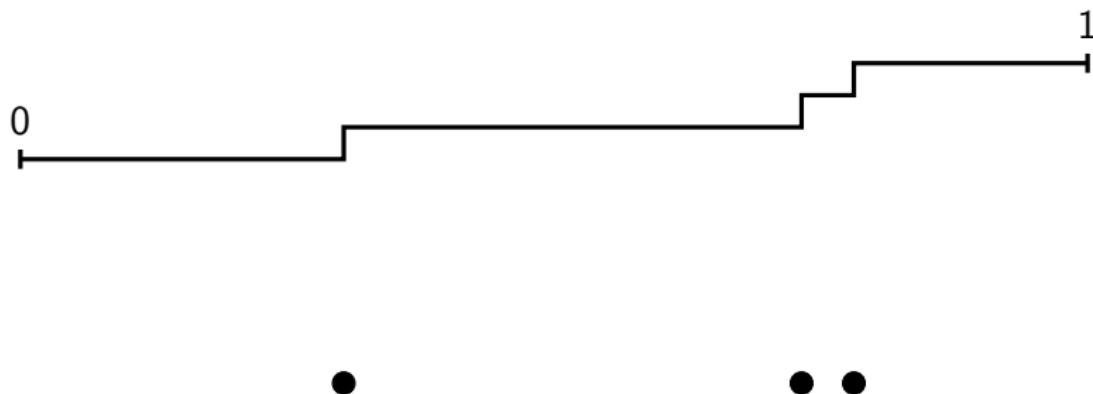
... nebo erodujeme břeh,

# Jednostranný model pro vytvoření kanyonu



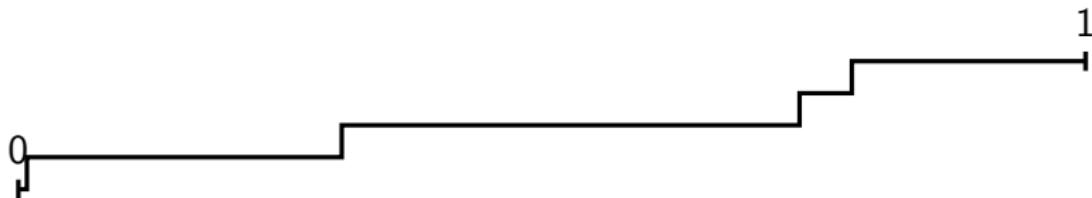
... v závislosti na tom, kam padne nový bod.

# Jednostranný model pro vytvoření kanyonu



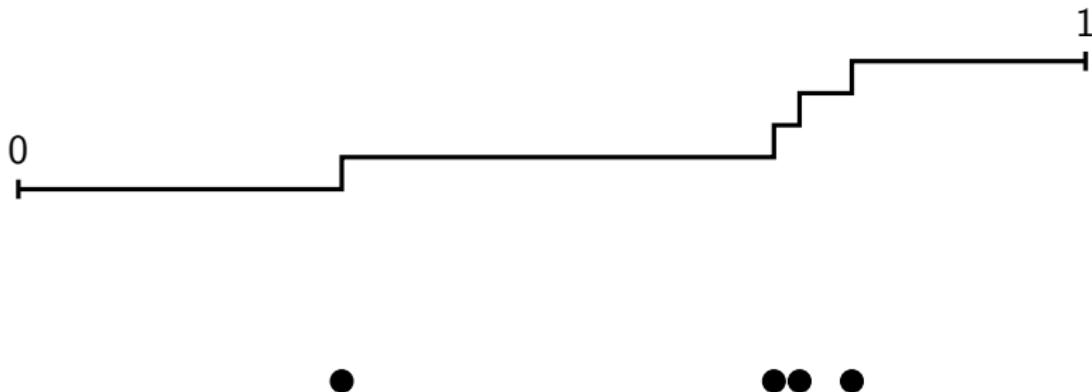
Body, co padnou vlevo od všech ostatních prostě přidáme.

# Jednostranný model pro vytvoření kanyonu



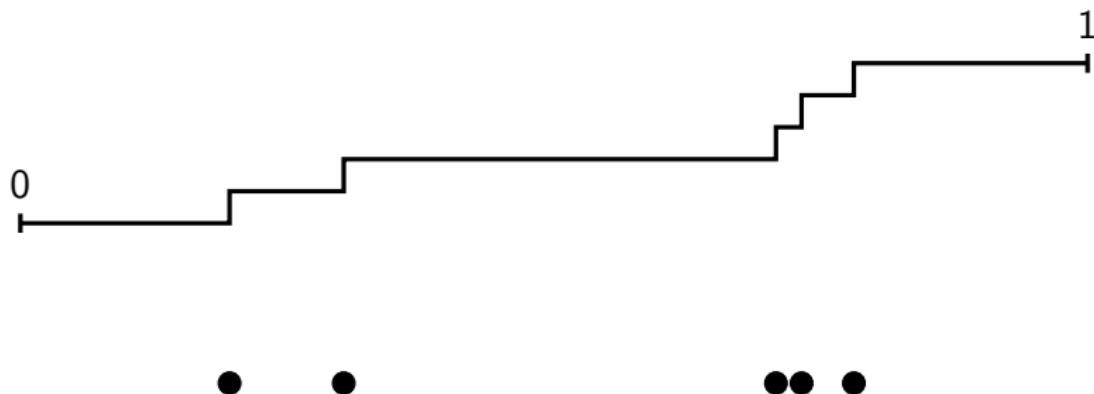
Body, co padnou vlevo od všech ostatních prostě přidáme.

# Jednostranný model pro vytvoření kanyonu



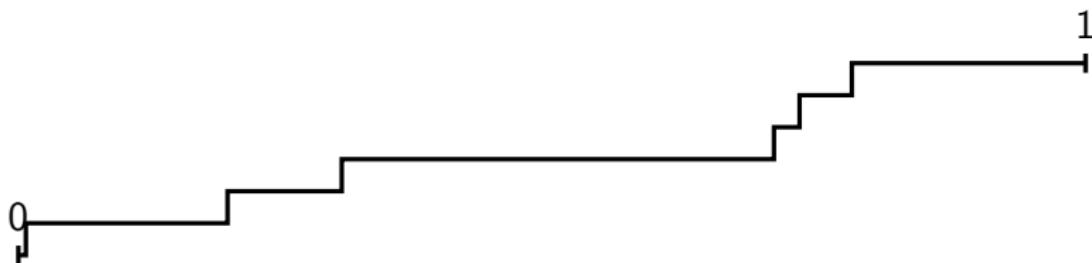
V opačném případě odstraníme bod, co byl dosud nejvíce vlevo.

# Jednostranný model pro vytvoření kanyonu



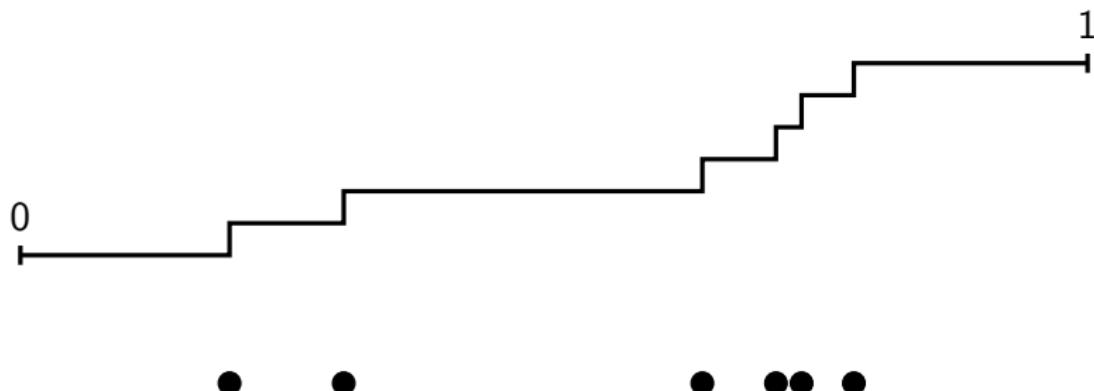
Jinýmí slovy, vždycky přidáme nový bod.

# Jednostranný model pro vytvoření kanyonu



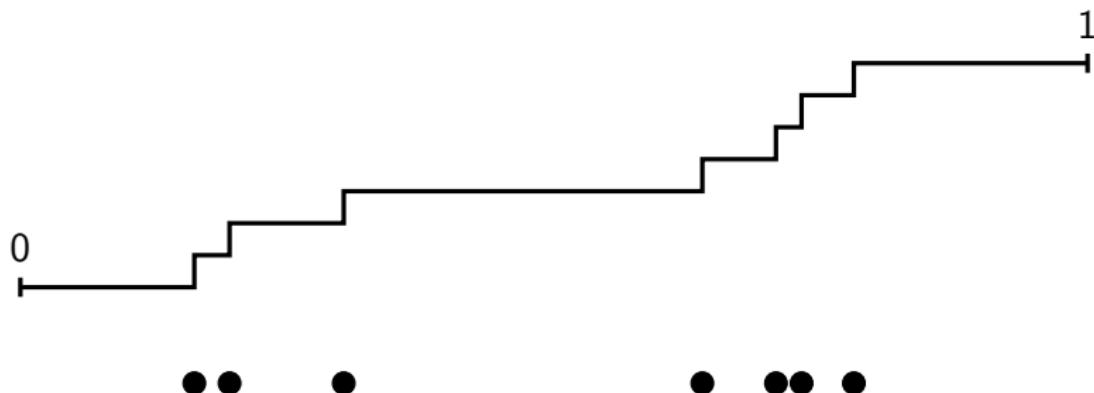
Jiným slovy, vždycky přidáme nový bod...

# Jednostranný model pro vytvoření kanyonu



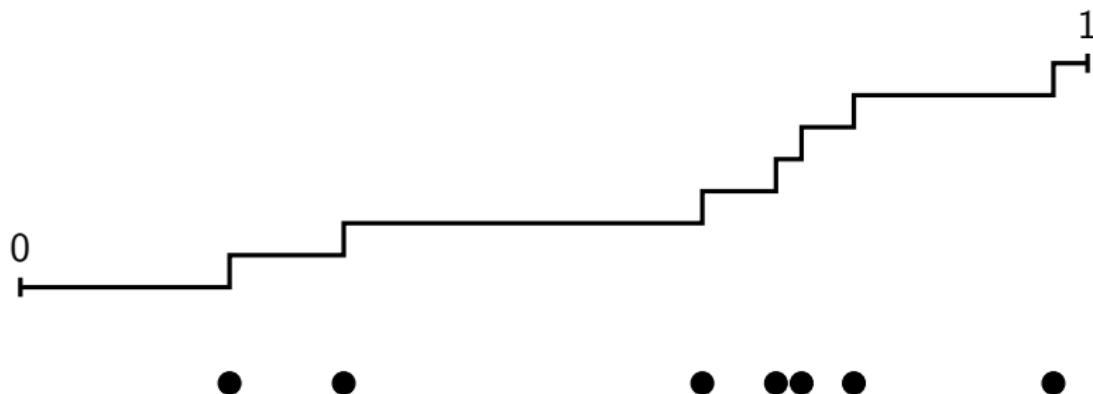
a odstraníme bod nejvíce vlevo, pokud to není ten nový.

# Jednostranný model pro vytvoření kanyonu



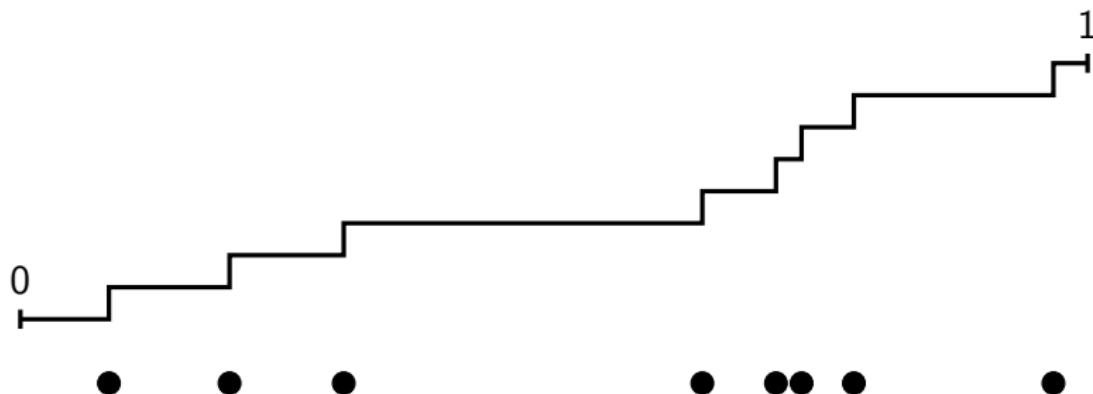
a odstraníme bod nejvíce vlevo, pokud to není ten nový.

# Jednostranný model pro vytvoření kanyonu



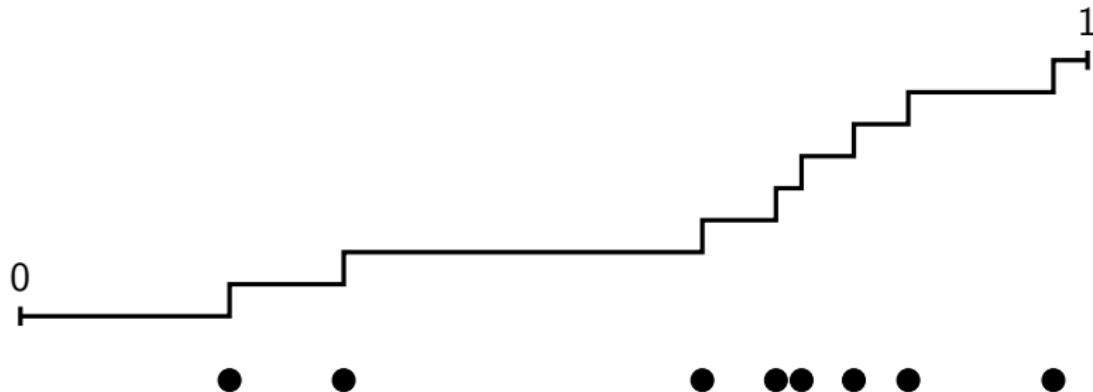
a odstraníme bod nejvíce vlevo, pokud to není ten nový.

# Jednostranný model pro vytvoření kanyonu



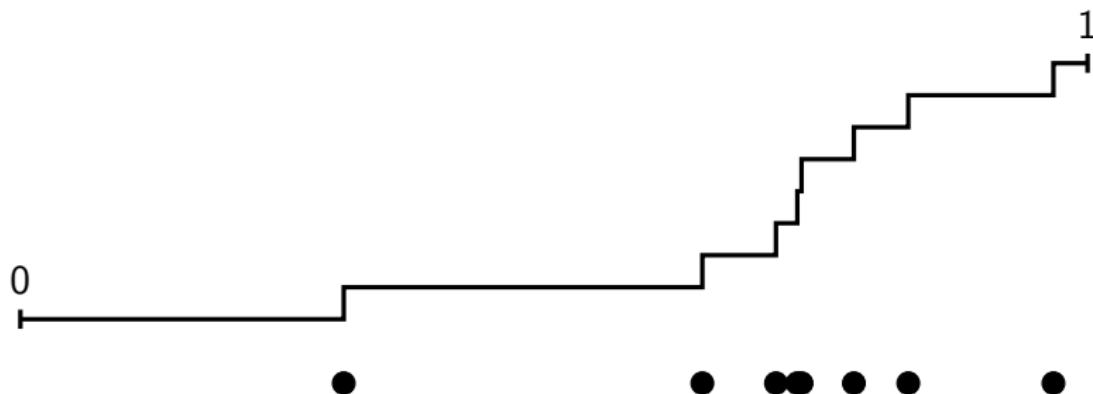
a odstraníme bod nejvíce vlevo, pokud to není ten nový.

# Jednostranný model pro vytvoření kanyonu



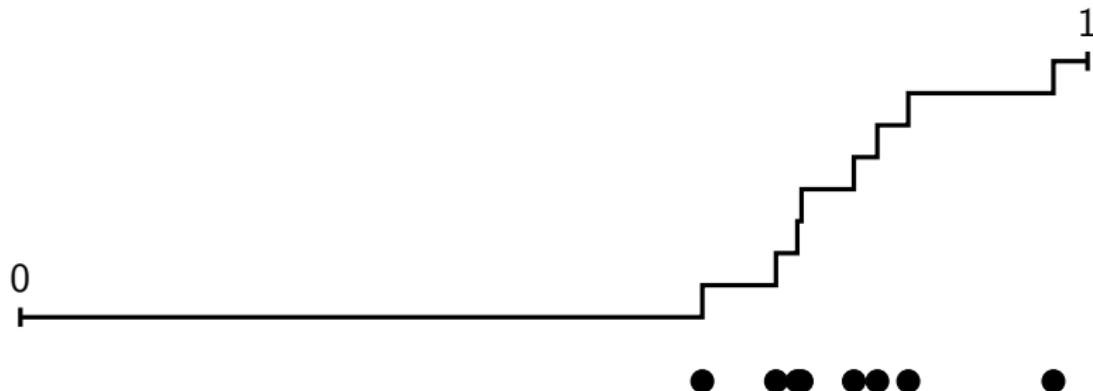
a odstraníme bod nejvíce vlevo, pokud to není ten nový.

# Jednostranný model pro vytvoření kanyonu



a odstraníme bod nejvíce vlevo, pokud to není ten nový.

# Jednostranný model pro vytvoření kanyonu



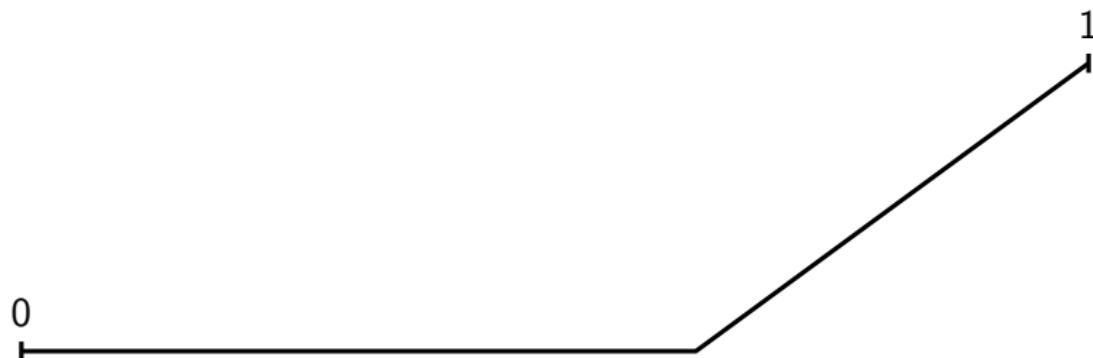
a odstraníme bod nejvíce vlevo, pokud to není ten nový.

# Jednostranný model pro vytvoření kanyonu



a odstraníme bod nejvíce vlevo, pokud to není ten nový.

# Jednostranný model pro vytvoření kanyonu



V tomto modelu je kritický bod  $p_c = 1 - e^{-1} \approx 0.63212$ .

# Jednostranný model pro vytvoření kanyonu

Pravidla na předchozích stranách definují Markovský řetězec  $(X_k)_{k \geq 0}$ , kde  $X_k \subset [0, 1]$  je konečná množina.

**Konsistence:** pro každé  $0 < q < 1$ , omezený proces

$$(X_k \cap [0, q])_{k \geq 0}$$

je také Markovský řetězec.

**Věta** Omezený proces je pozitivní rekurentní pro  $q < 1 - e^{-1}$  a transientní pro  $q > 1 - e^{-1}$ .

**Otevřený problem** Chování v kritickém bodě.

**Proof of the theorem** Since only the relative order of the points matters, transforming space we may assume that the  $(U_k)_{k \geq 1}$  are i.i.d. exponentially distributed with mean one and  $X_k \subset [0, \infty]$ .

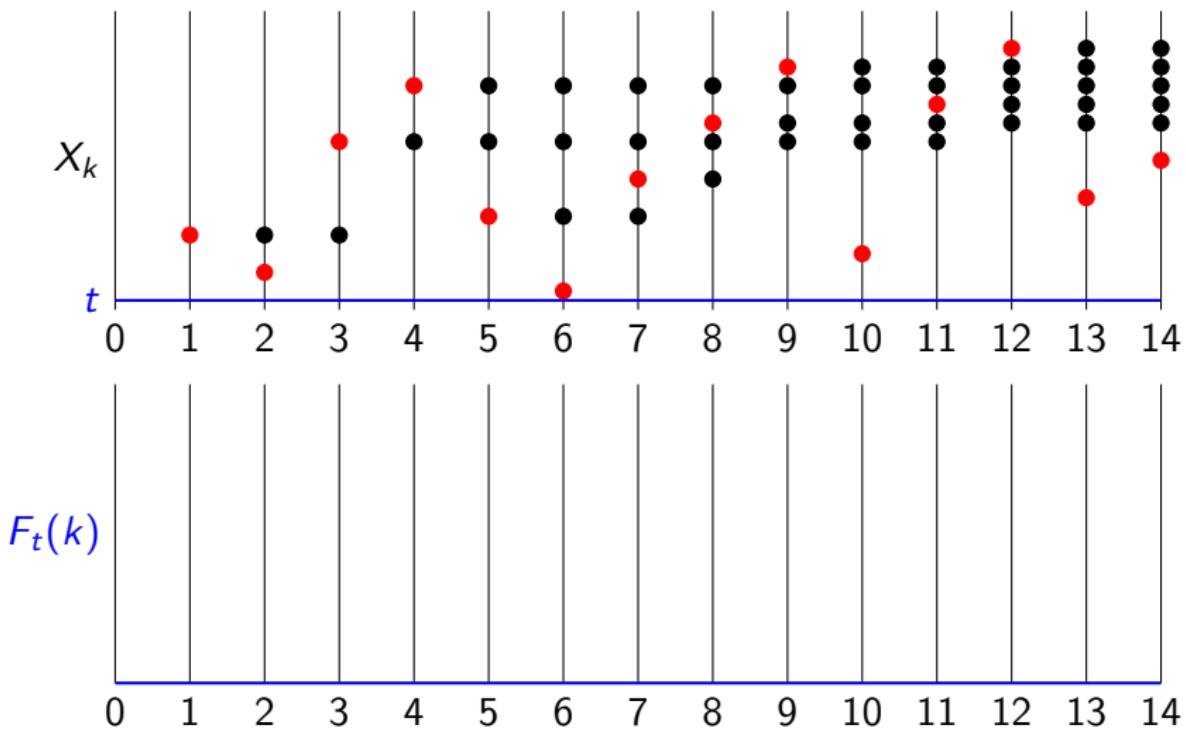
For the modified model, we must prove that  $p_c = 1$ .

Start with  $X_0 = \emptyset$  and define

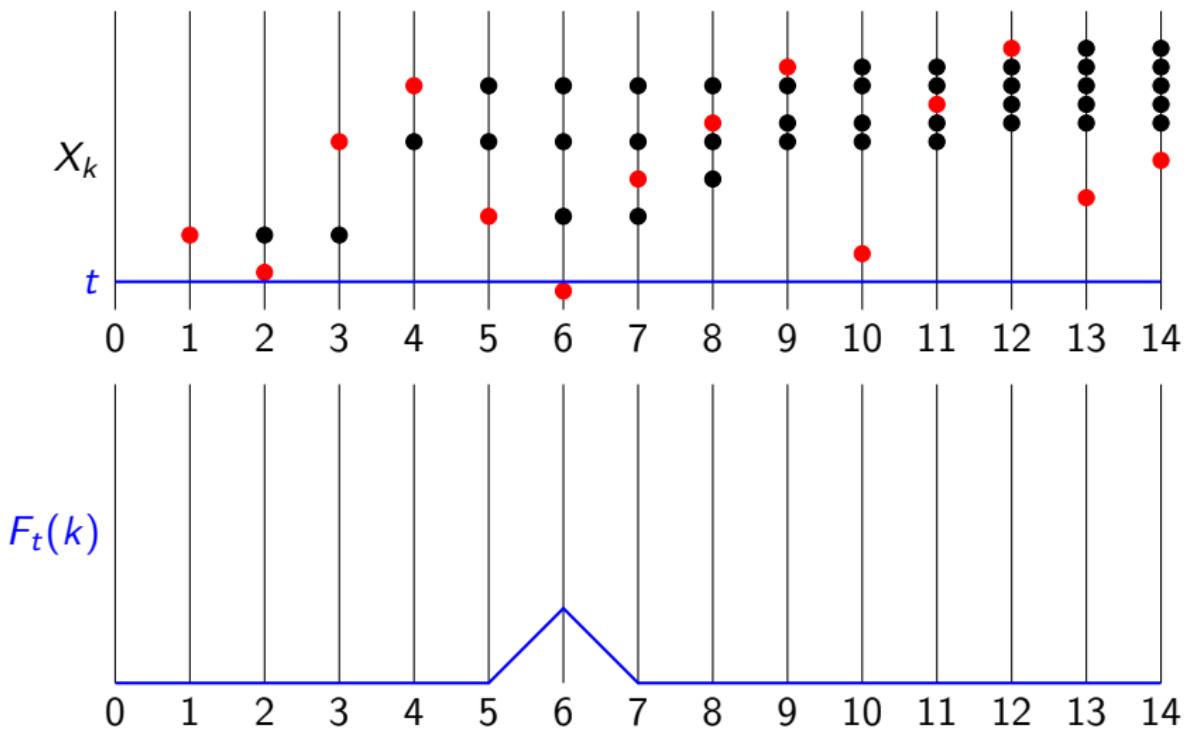
$$F_t(k) := |X_k \cap [0, t]| \quad (k \geq 0, t \geq 0).$$

**Claim**  $(F_t)_{t \geq 0}$  is a continuous-time Markov process taking values in the functions  $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

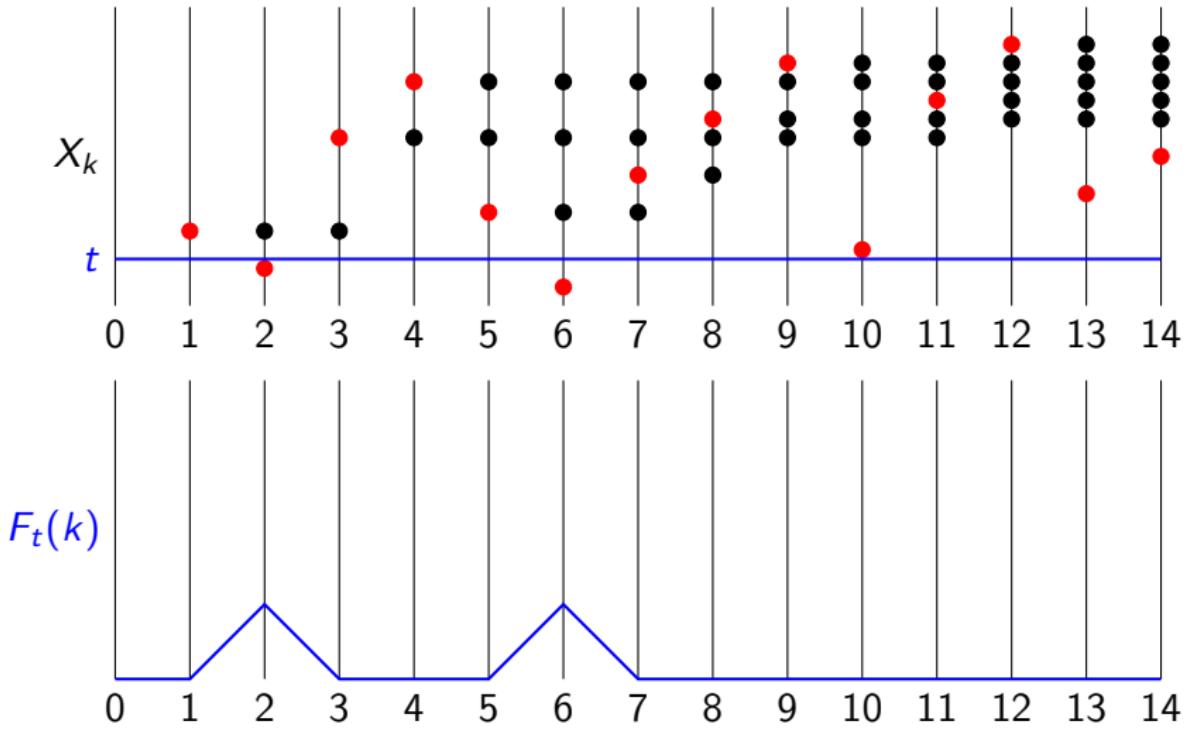
# The point-counting function



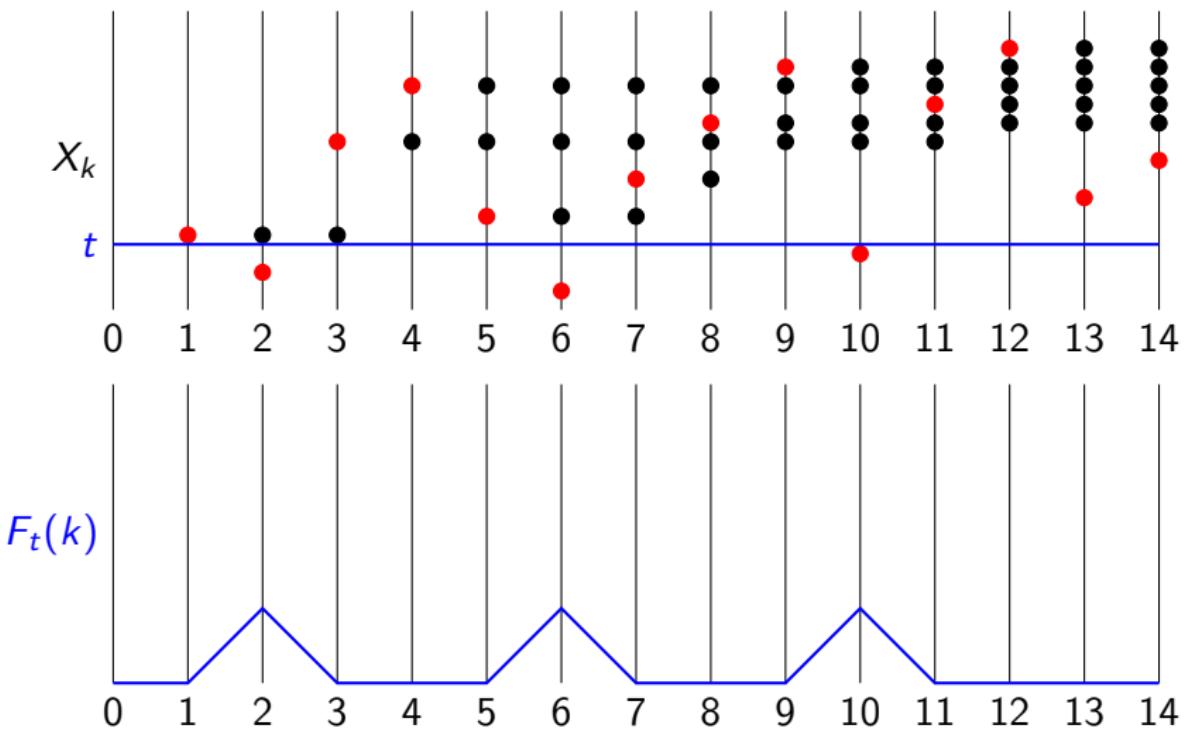
# The point-counting function



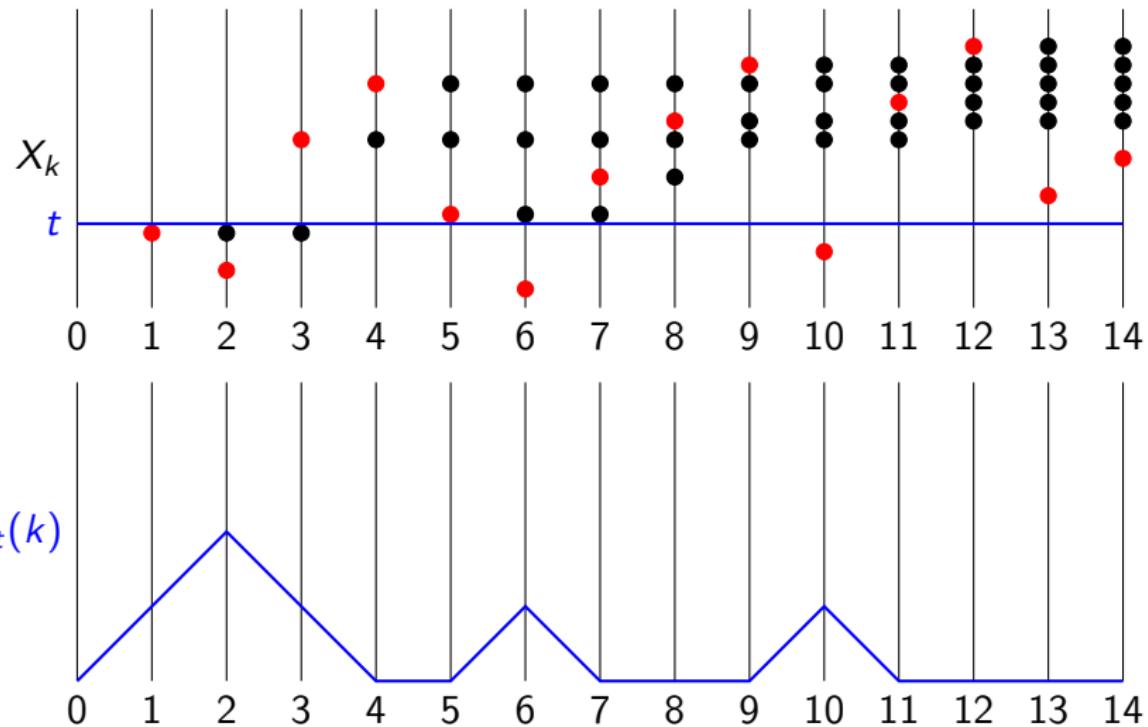
# The point-counting function



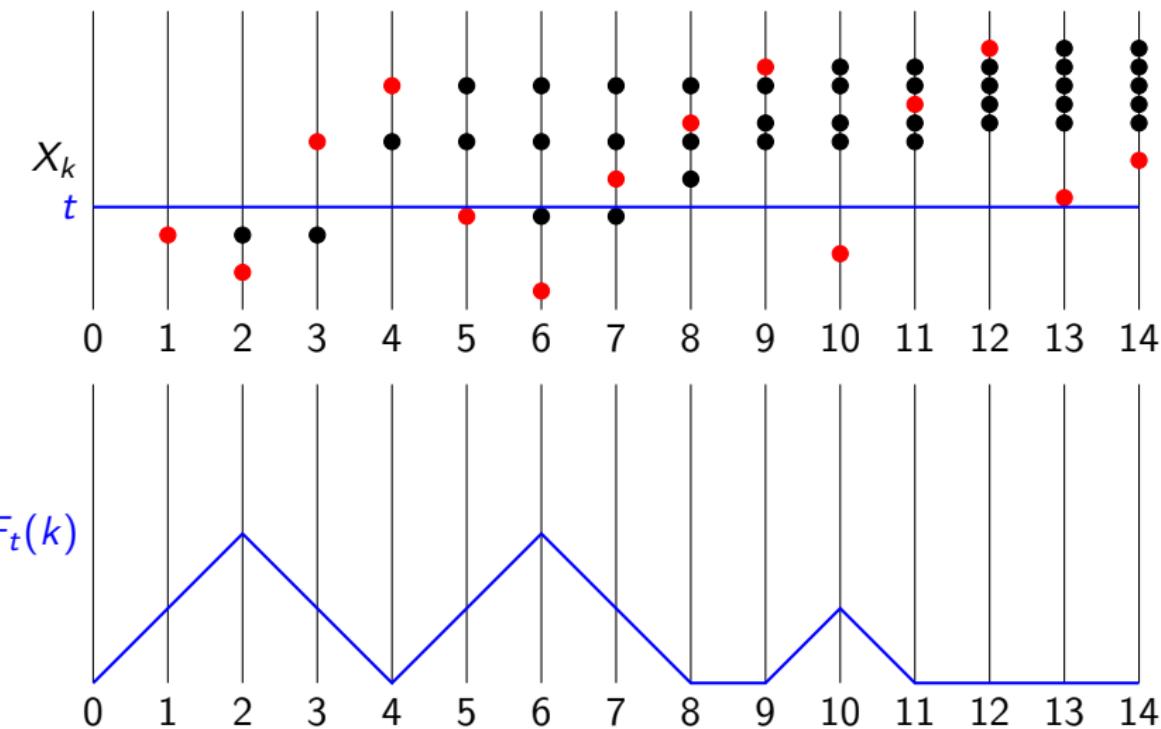
# The point-counting function



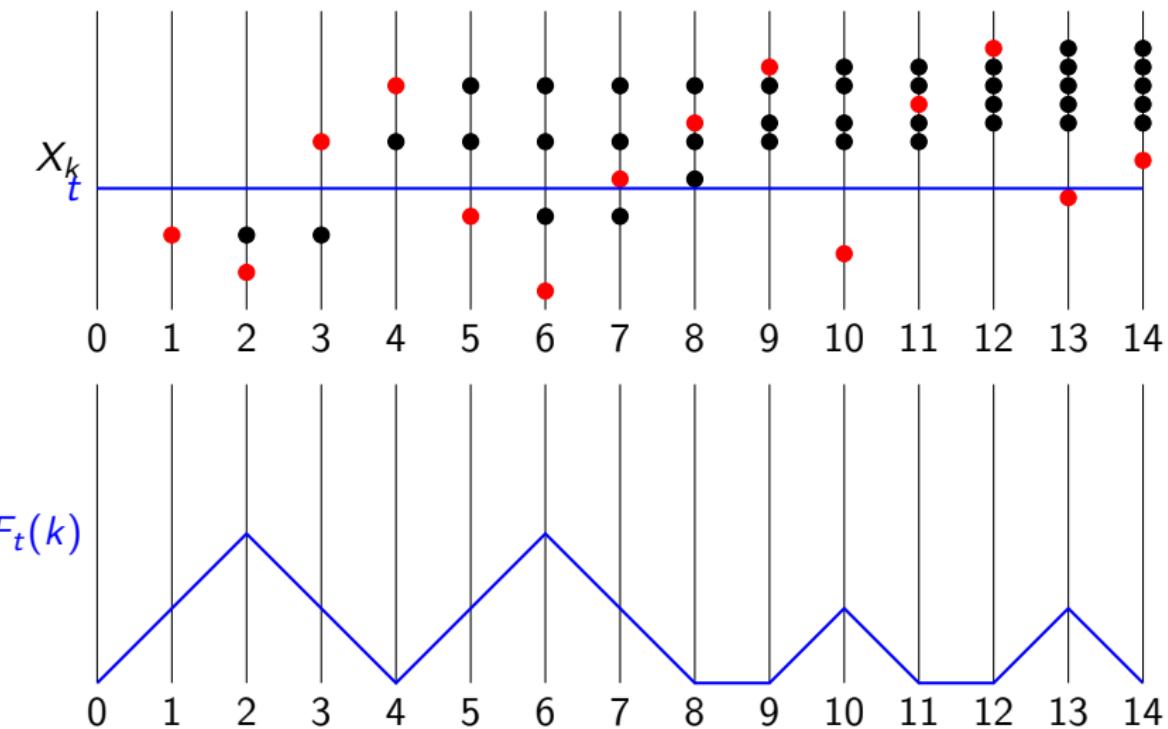
# The point-counting function



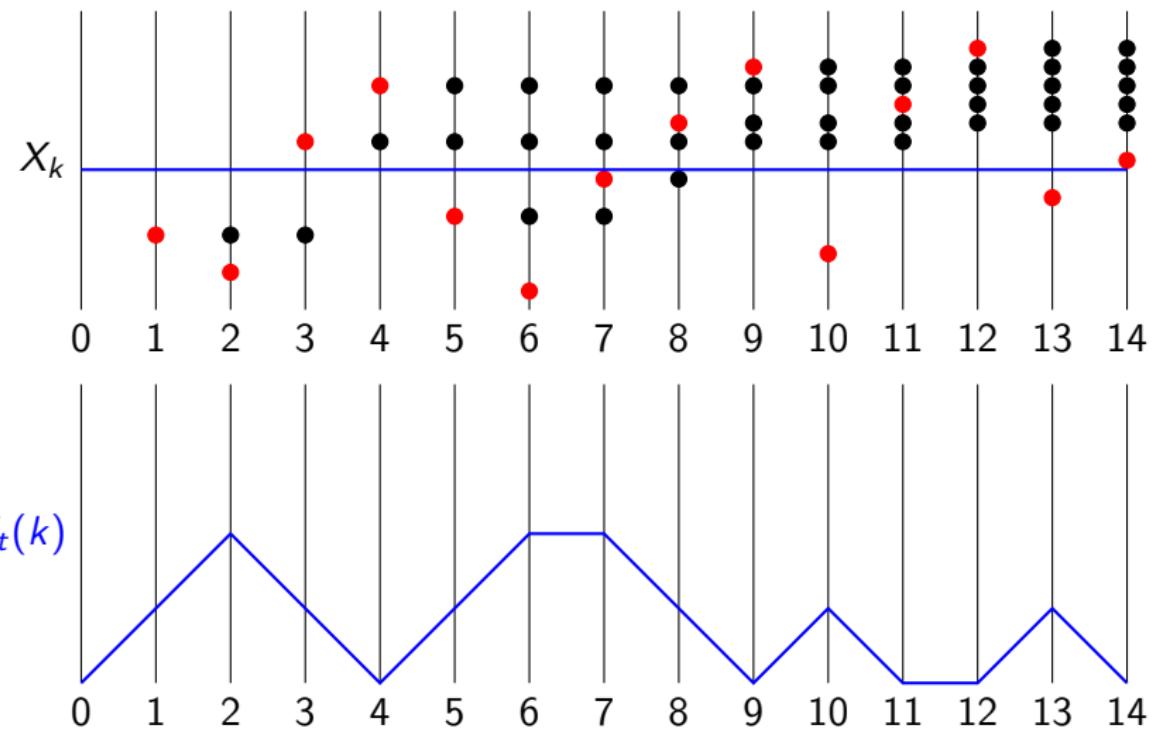
# The point-counting function



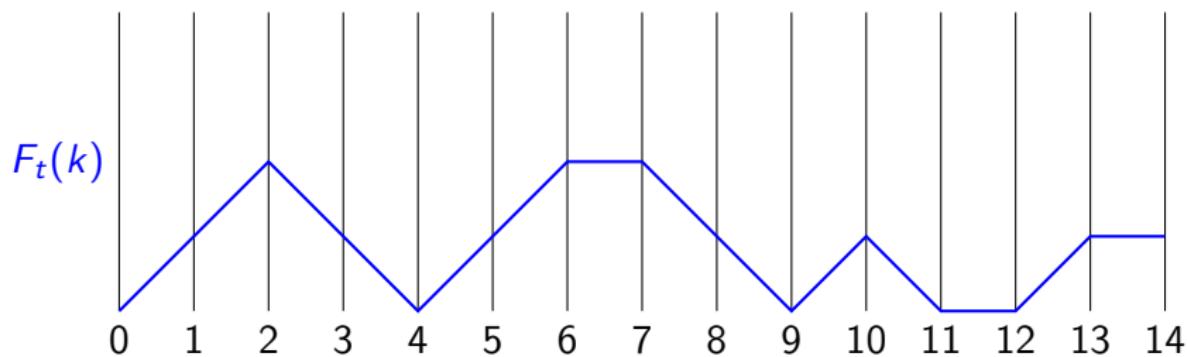
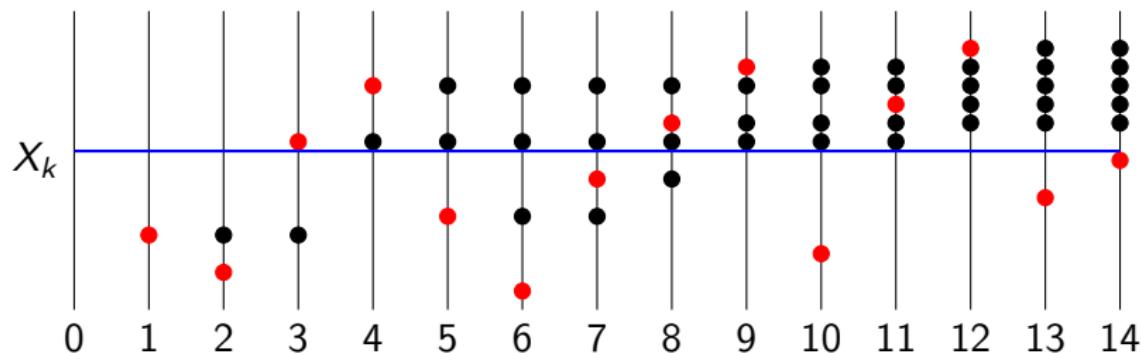
# The point-counting function



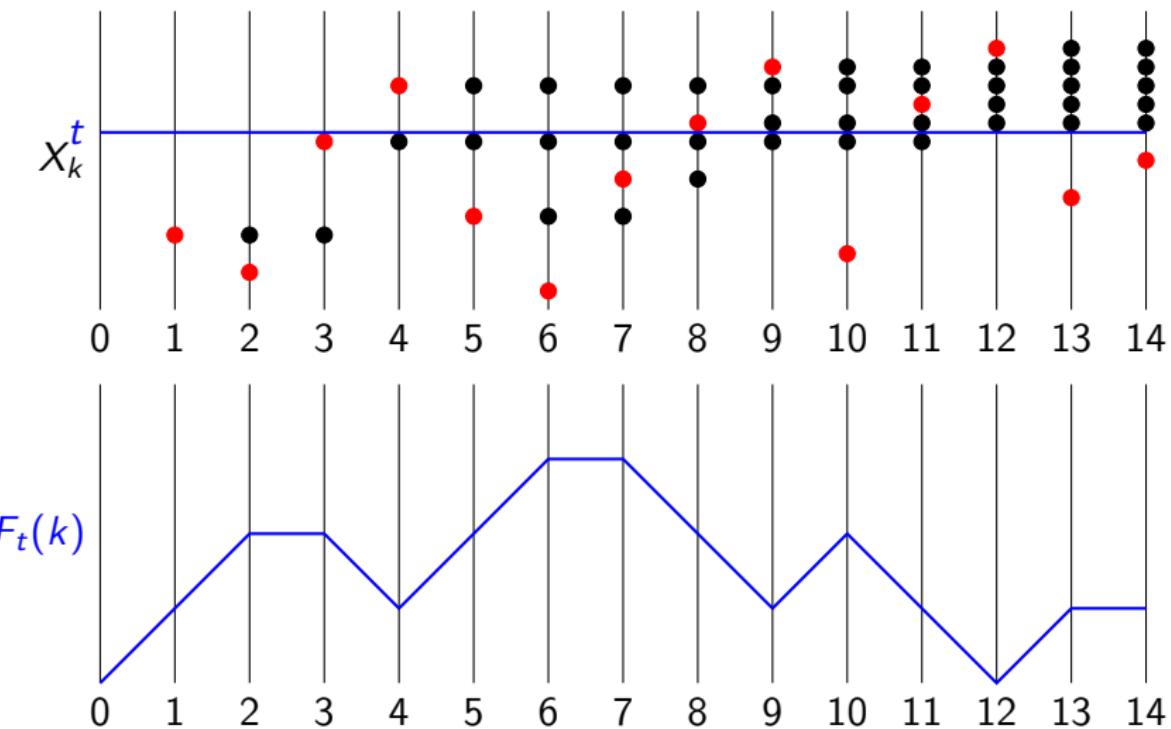
# The point-counting function



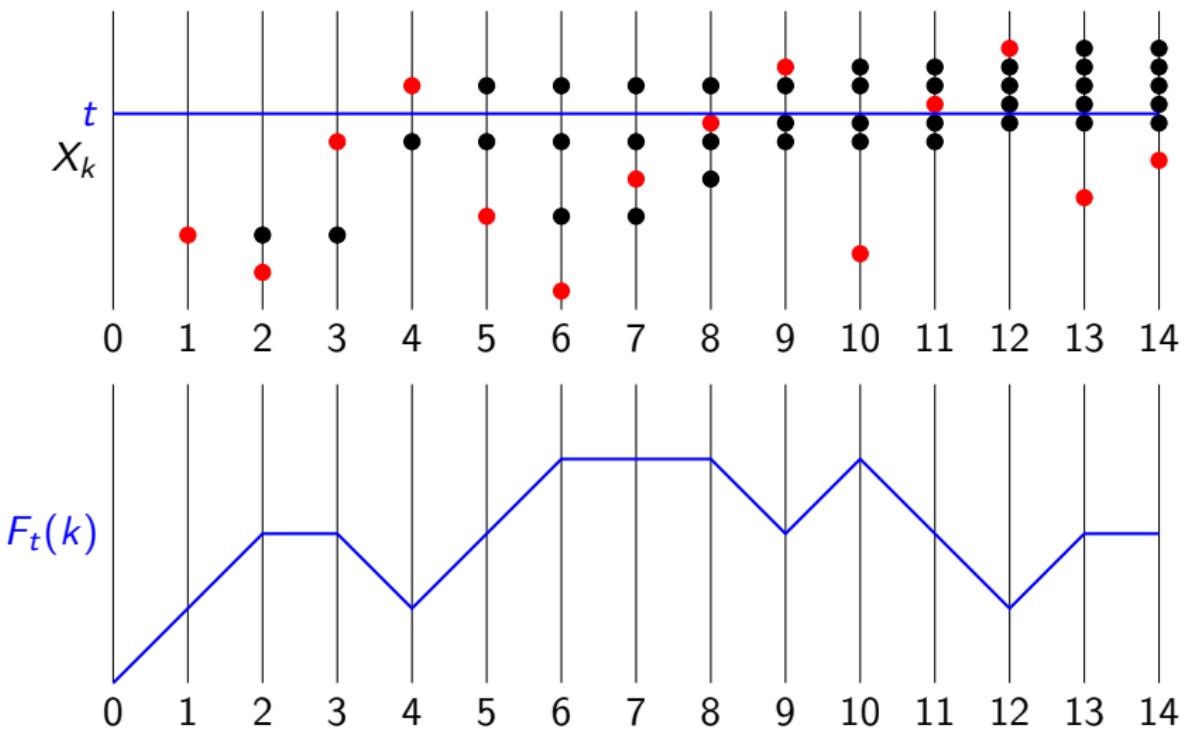
# The point-counting function



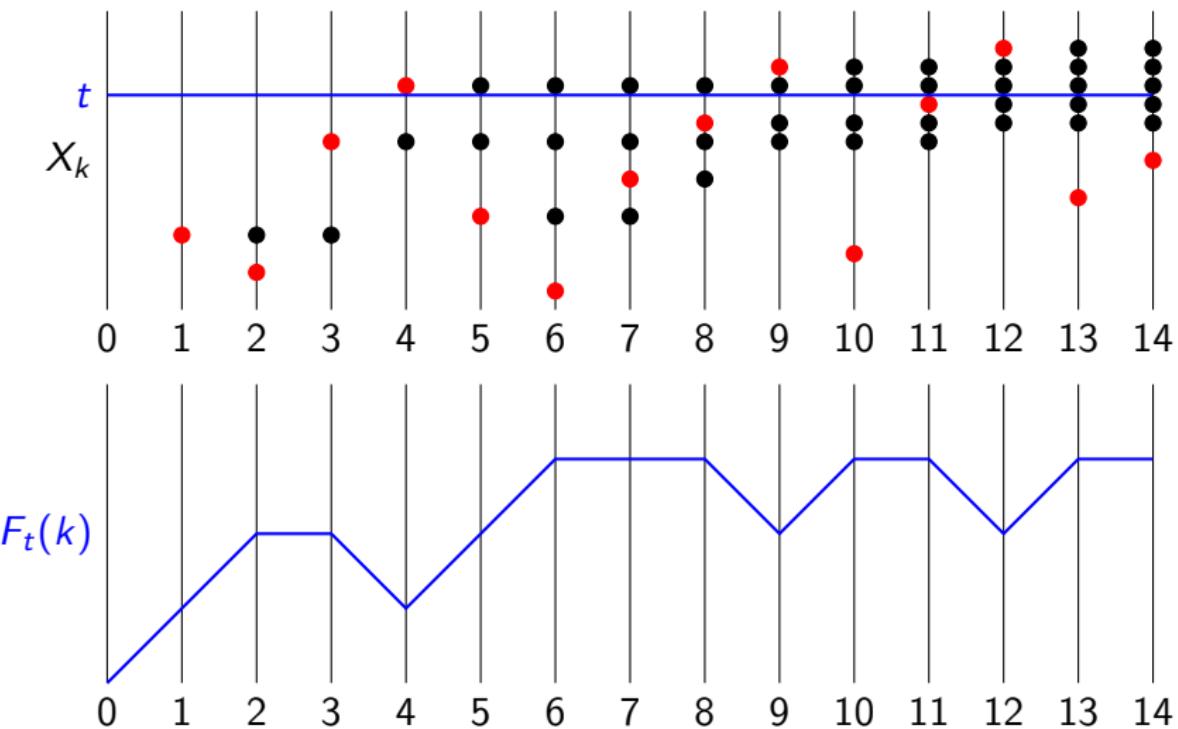
# The point-counting function



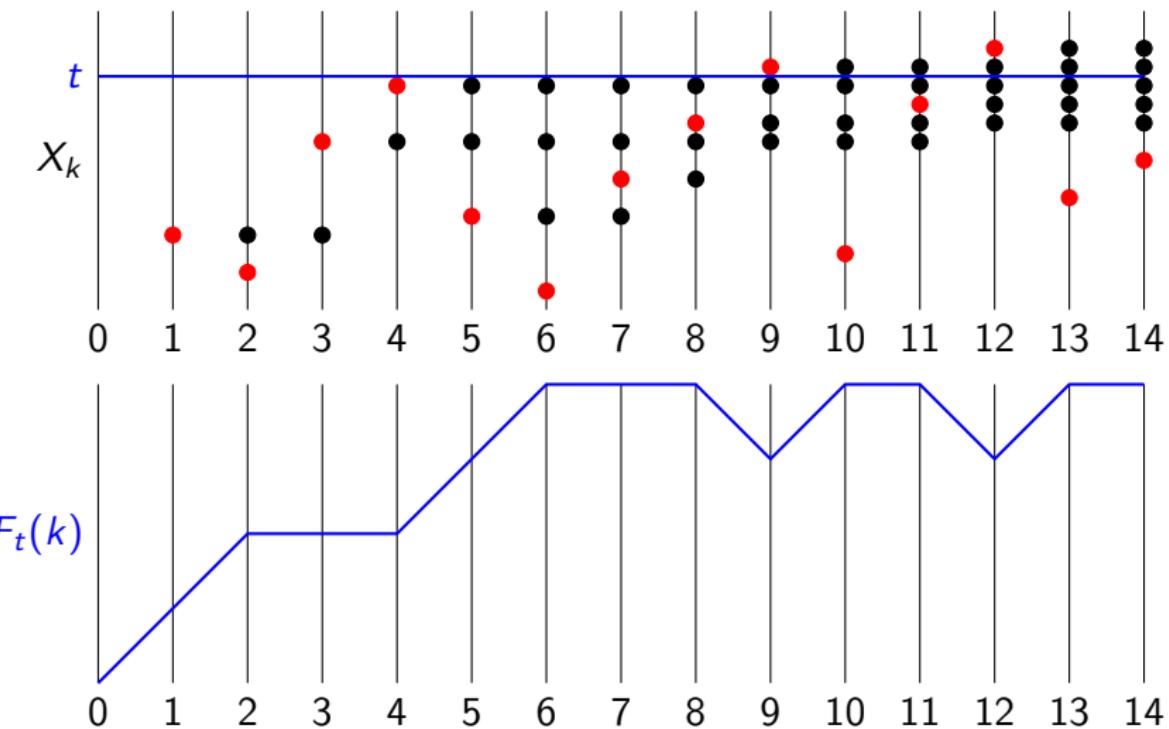
# The point-counting function



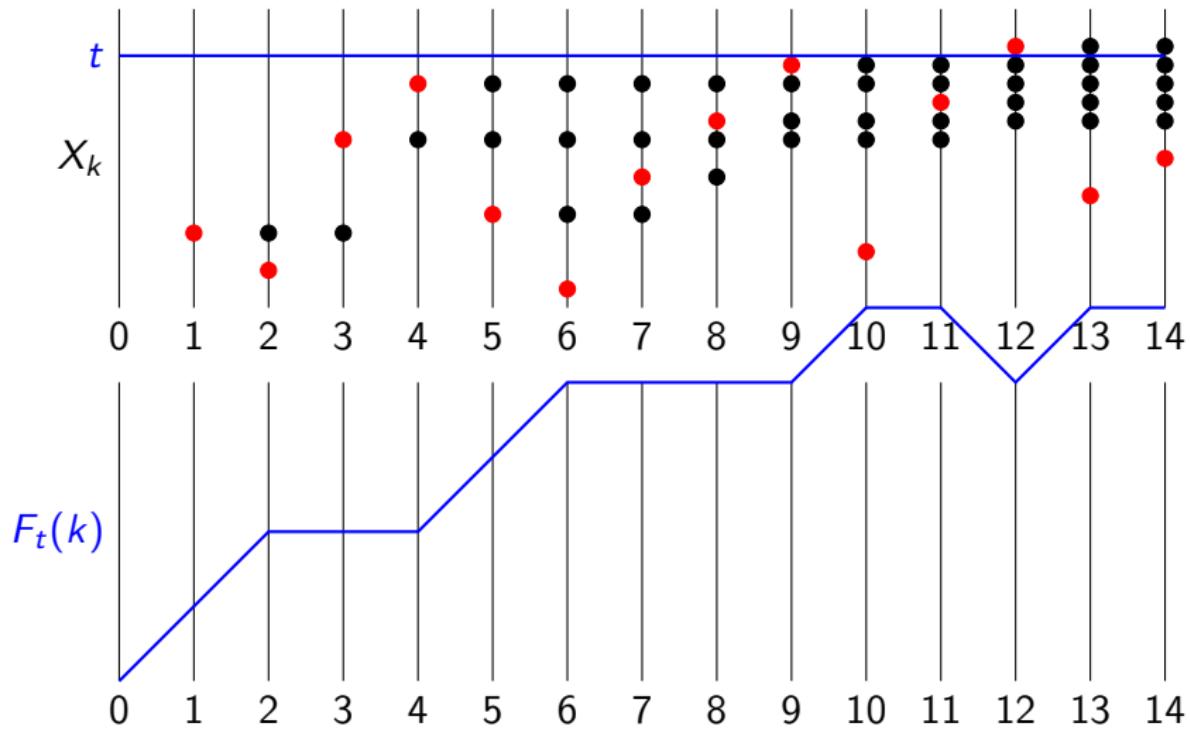
# The point-counting function



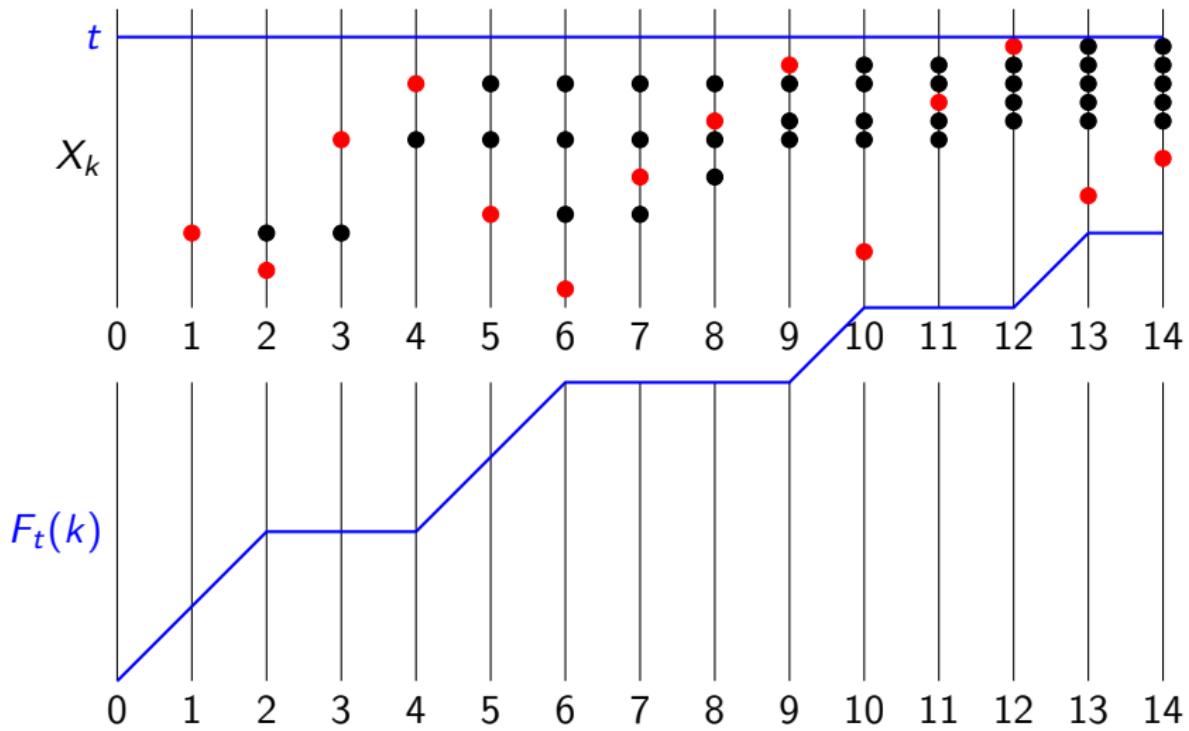
# The point-counting function



# The point-counting function



# The point-counting function



# Increments

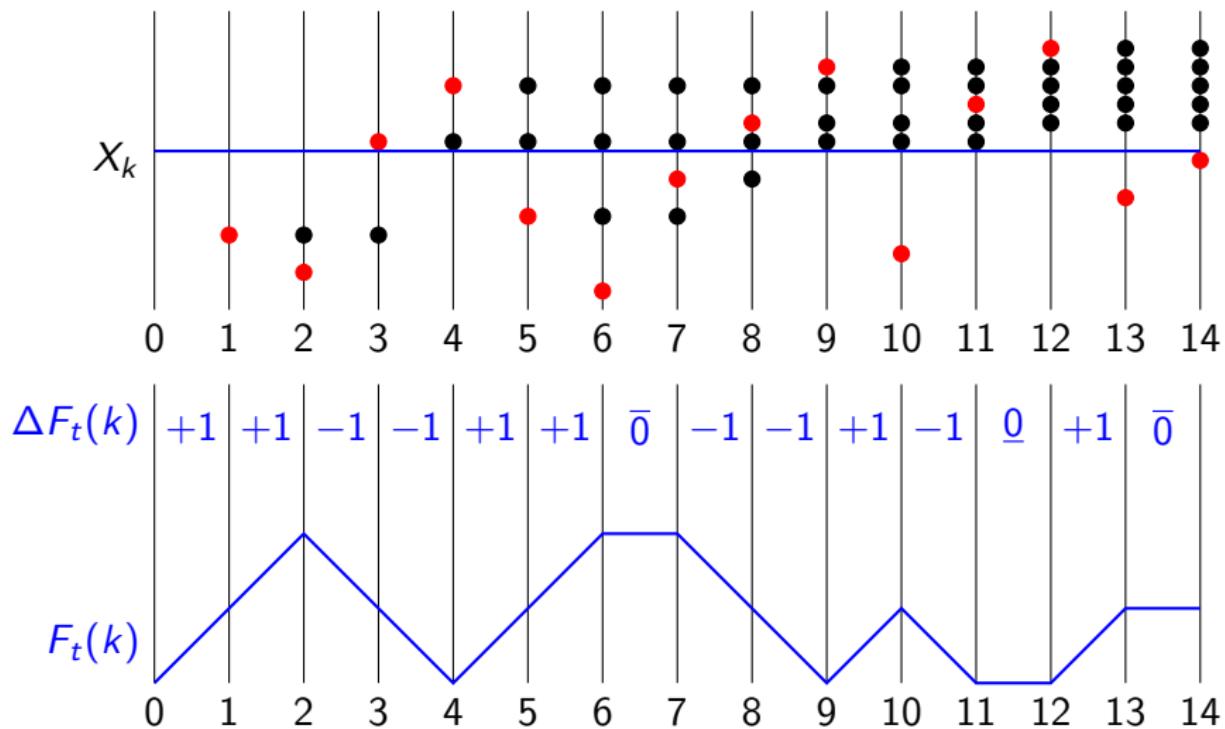
Define

$$\Delta F_t(k) := \begin{cases} \underline{0} & \text{if } F_t(k) = F_t(k-1) = 0, \\ \bar{0} & \text{if } F_t(k) = F_t(k-1) > 0, \\ -1 & \text{if } F_t(k) = F_t(k-1) - 1, \\ +1 & \text{if } F_t(k) = F_t(k-1) + 1. \end{cases}$$

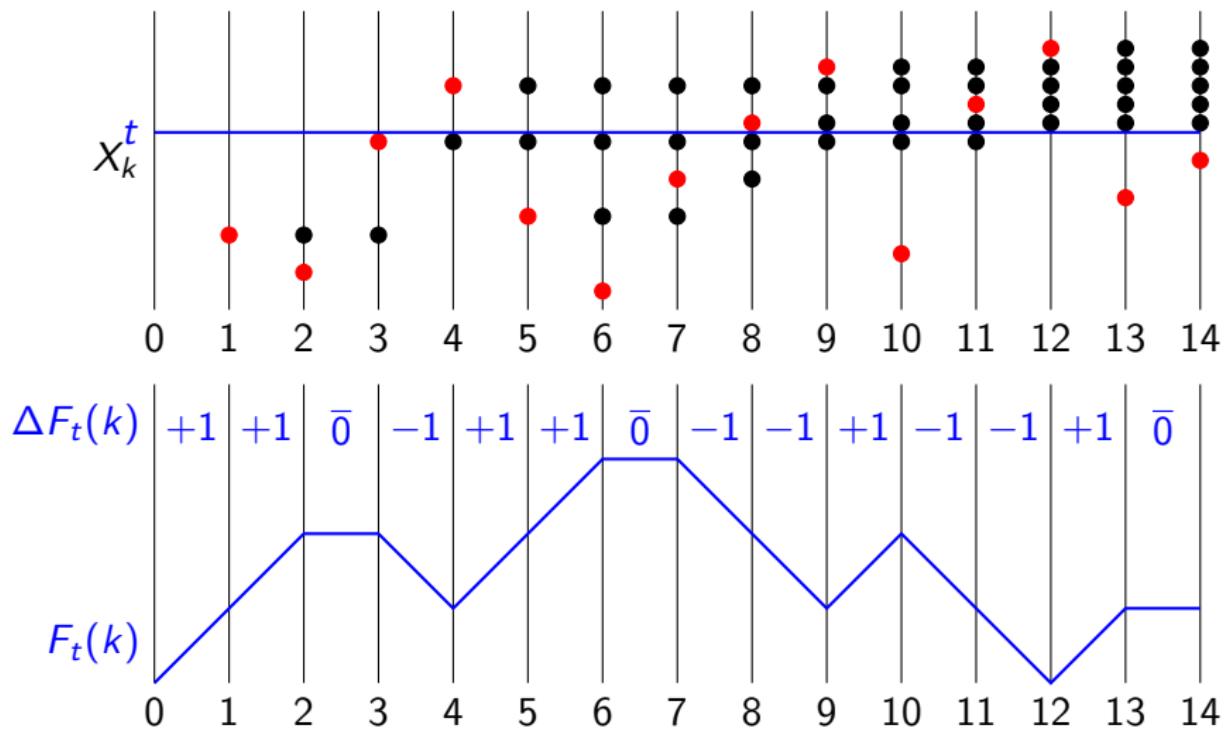
At the exponentially distributed time  $t = U_k$ , the increment  $\Delta F_t(k)$  changes from  $\underline{0}$  to  $+1$  or from  $-1$  to  $\bar{0}$ .

At the same time, the next  $\underline{0}$  to the right of  $k$ , if there is one, is changed into a  $-1$ .

# The point-counting function



# The point-counting function



# A stationary increment process

We can define the Markov process  $(\Delta F_t)_{t \geq 0}$  also on  $\mathbb{Z}$  instead of on  $\mathbb{N}_+$ .

As long as the density of  $\underline{0}$ 's is nonzero, the process started in  $\Delta F_0(k) = \underline{0}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) satisfies

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{P}[\Delta F_t(k) = \underline{0}] = -2\mathbb{P}[\Delta F_t(k) = \underline{0}] - \mathbb{P}[\Delta F_t(k) = -1],$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{P}[\Delta F_t(k) = -1] = \mathbb{P}[\Delta F_t(k) = \underline{0}],$$

from which we derive that the  $\underline{0}$ 's run out at  $t_c = 1$  and

$$\mathbb{P}[\Delta F_t(1) = \underline{0}] = (1 - t)e^{-t} \quad \text{and} \quad \mathbb{P}[\Delta F_t(1) = -1] = te^{-t}$$

$$(0 \leq t \leq 1).$$

# The increment process

The process  $(F_t)_{t \geq 0}$ , both on  $\mathbb{N}_+$  and  $\mathbb{Z}$ , makes i.i.d. excursions away from 0.

For the process started in  $X_0 = \emptyset$ , define the return time

$$\tau_t^\emptyset := \inf \{k \geq 1 : X_k \cap [0, t] = \emptyset\}.$$

From the density of 0's for the process  $(F_t)_{t \geq 0}$  on  $\mathbb{Z}$  we deduce that

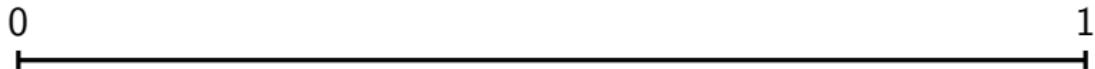
$$\mathbb{E}[\tau_t^\emptyset] = (1 - t)^{-1} \quad (0 \leq t < 1).$$

This proves positive recurrence  $\Leftrightarrow t < 1$ .

It is not hard to derive from this that the restricted process  $(X_k \cap [0, t])_{k \geq 0}$  is transient for  $t > 1$ .

Null recurrence at  $t = 1$  is so far an open problem.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



V začátku je rovná skalní plošina.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



Řeka se buď zařezává do skály v náhodně vybraném bodě.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



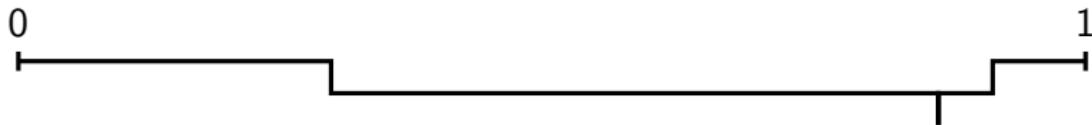
Nebo břeh mezi vybraným bodem a řeka je erodován o jeden krok

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



Pokračujeme tímto způsobem.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



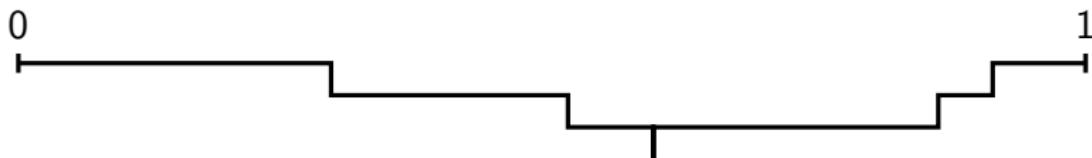
Budě se řeka zařezává do skály.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



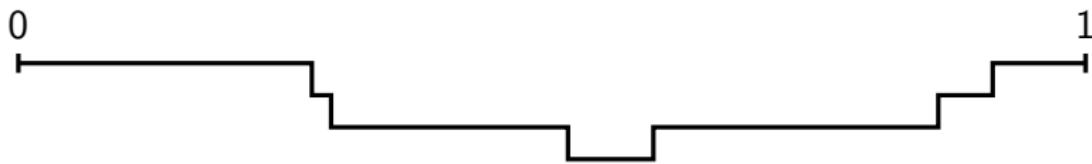
Nebo jeden břeh je erodovaný.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



Nás zajímá limitní profil.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



Nás zajímá limitní profil.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



Nás zajímá limitní profil.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



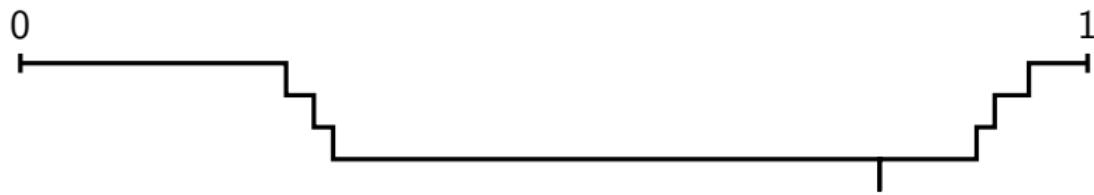
Nás zajímá limitní profil.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



Nás zajímá limitní profil.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



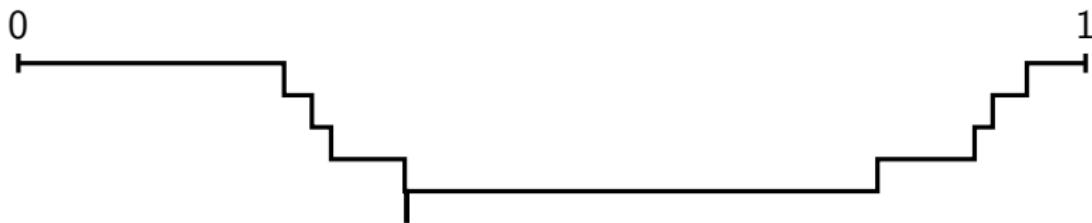
Nás zajímá limitní profil.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



Nás zajímá limitní profil.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



Nás zajímá limitní profil.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



Nás zajímá limitní profil.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



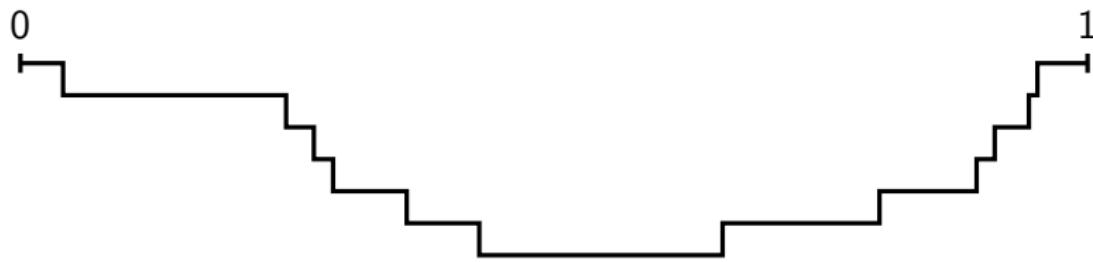
Nás zajímá limitní profil.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



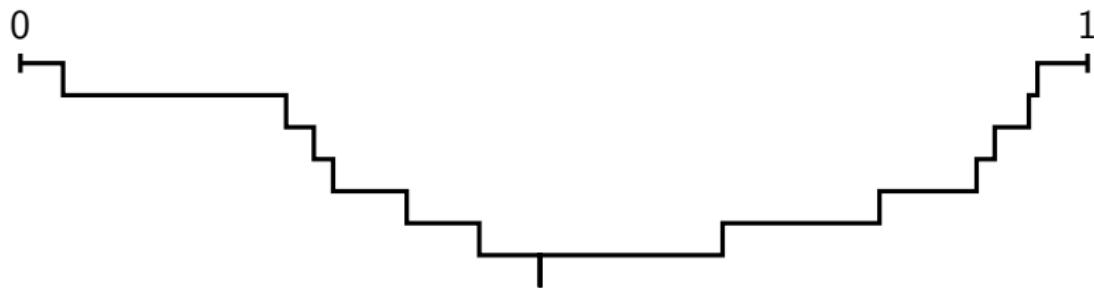
Nás zajímá limitní profil.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



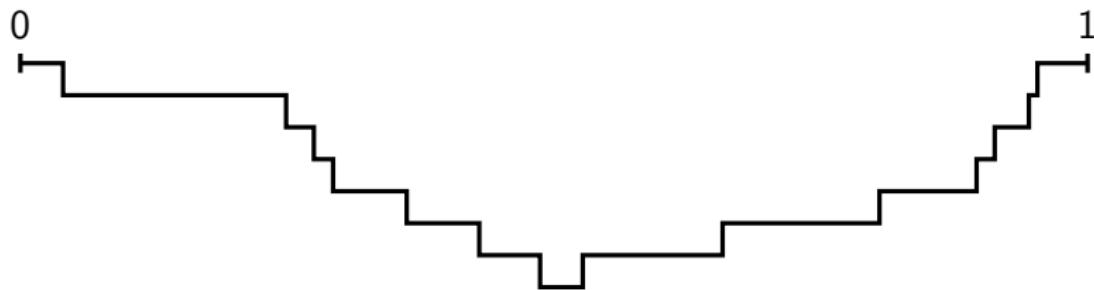
Nás zajímá limitní profil.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



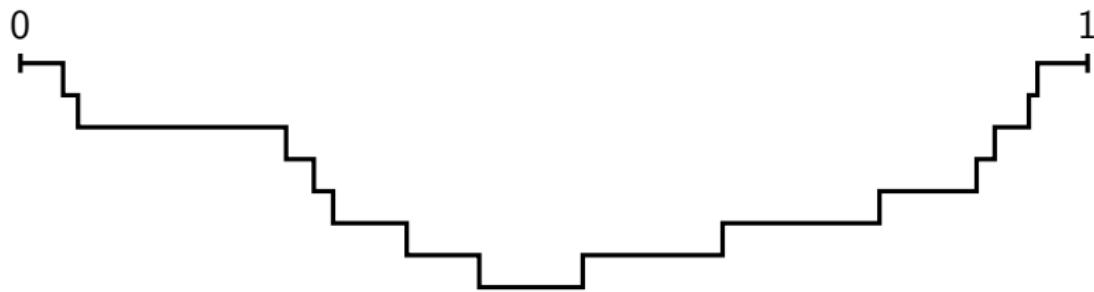
Nás zajímá limitní profil.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



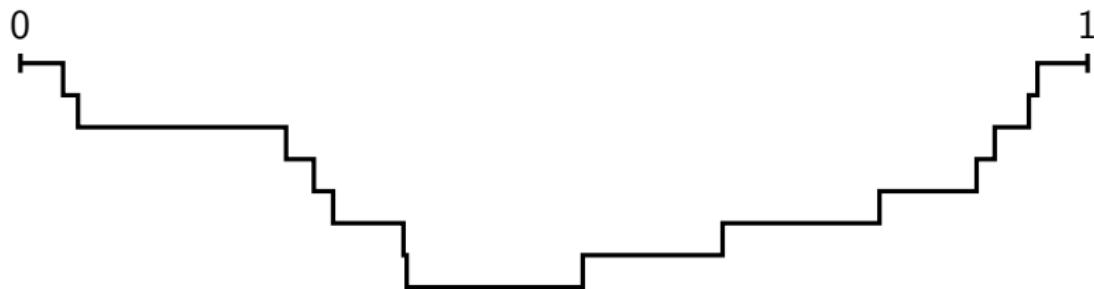
Nás zajímá limitní profil.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



Nás zajímá limitní profil.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



Nás zajímá limitní profil.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



Nás zajímá limitní profil.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



Nás zajímá limitní profil.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



Nás zajímá limitní profil.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



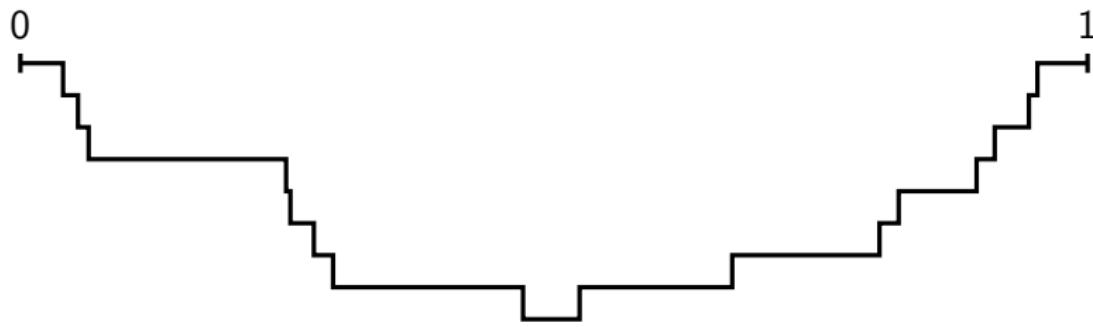
Nás zajímá limitní profil.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



Nás zajímá limitní profil.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



Nás zajímá limitní profil.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



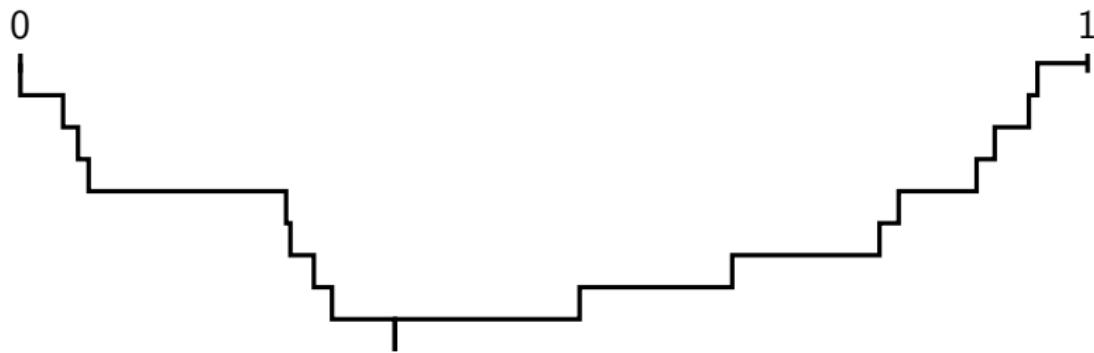
Nás zajímá limitní profil.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



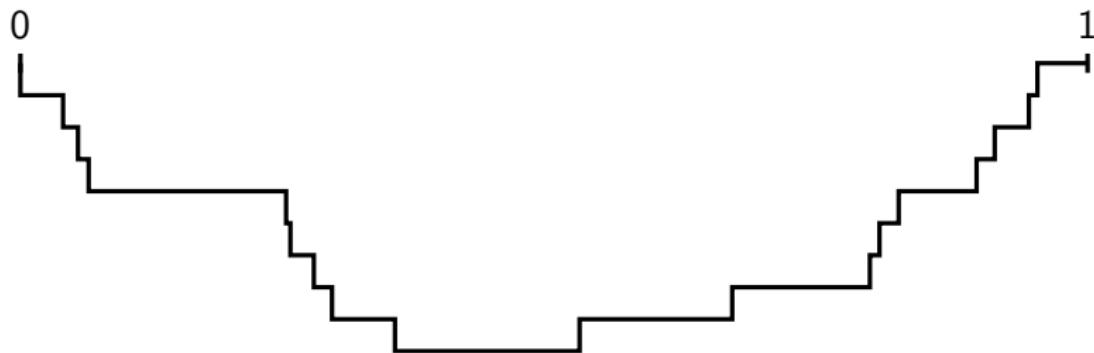
Nás zajímá limitní profil.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



Nás zajímá limitní profil.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



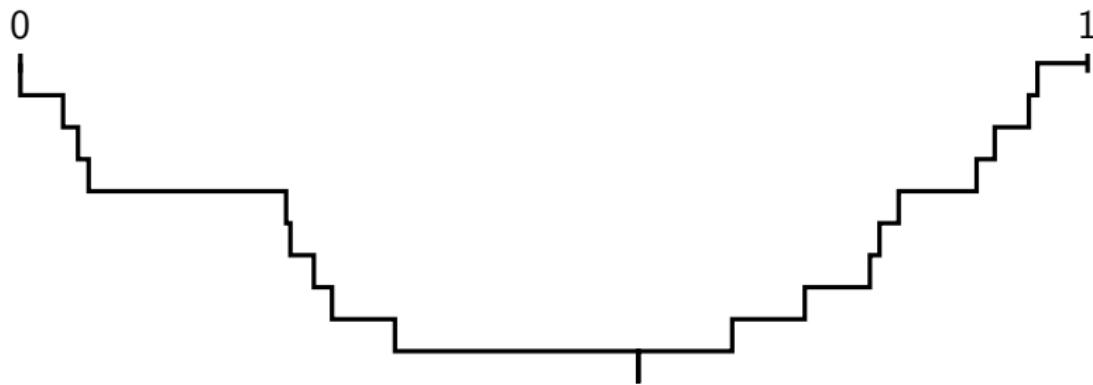
Nás zajímá limitní profil.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



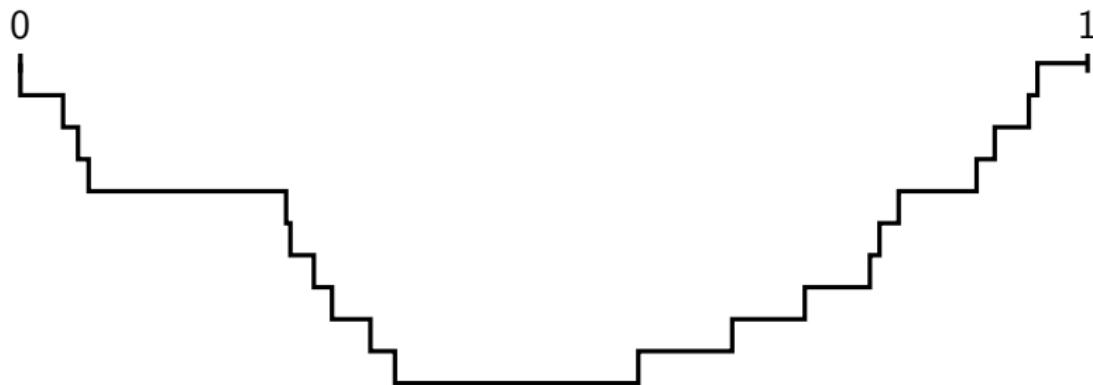
Nás zajímá limitní profil.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



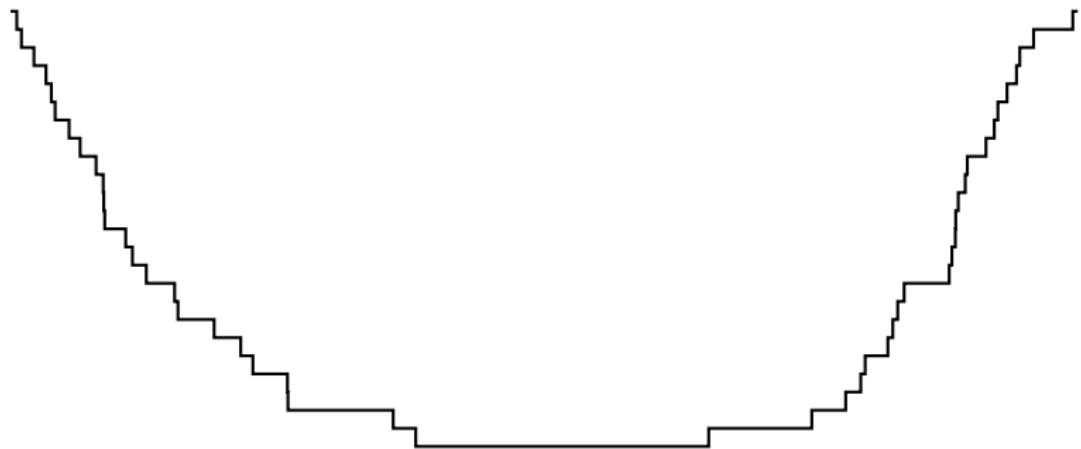
Nás zajímá limitní profil.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



Nás zajímá limitní profil.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



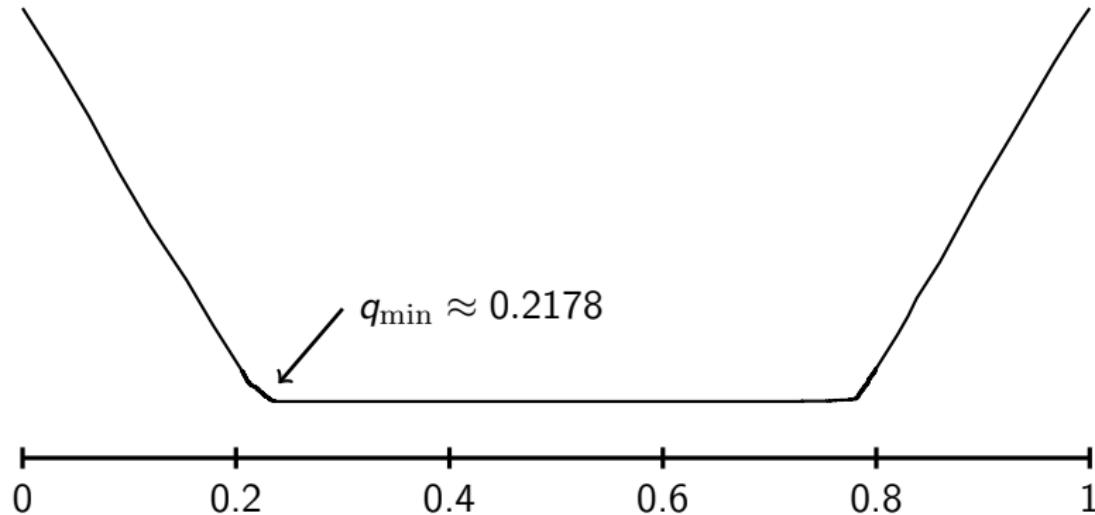
Profil po 100 krocích.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



Profil po 1000 krocích.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu



Profil po 10.000 krocích.

# Dvoustranný model pro vytvoření kanyonu

Narazíme na stejný kritický bod  $q_{\min}$  jak v případě Stigler-Luckockového modelu.

Modely jsou si vlastně velmi podobné:

- ▶ Interpretujme krok dolů jako poptávka a krok nahoru jako nabídka.
- ▶ Předpokládejme, že každý obchodník umístí jak poptávku, tak nabídku, velmi blízko sebe.

Potom dostaneme dvoustranný model pro vytvoření kanyonu

# Bak-Sneppenův model

Zaveden Bakem & Sneppenem (1993).

V ekosystému žije  $N$  druhů. Každý druh má “zdraví” (anglicky “fitness”), co je číslo v  $[0, 1]$ .

V každém kroku vymře ten druh  $i \in \{1, \dots, N\}$ , jehož zdraví je nejnižší, ale spolu s ním také jeho “sousedy”  $i - 1$  and  $i + 1$  (s periodickými okrajovými podmínkami). Všechny tři druhy jsou nahrazené novými druhy s náhodně vybranými “zdravími”.

Existuje kritický bod  $f_c \approx 0.6672(2)$  tak, že pokud  $N$  je velké, v rovnováze skoro všechny druhy mají “zdraví” v intervalu  $(f_c, 1]$ .

# Modifikovaný Bak-Sneppenův model

Zaveden v článku Meester & Sarkar (2012).

Místo jeho sousedy necháme spolu s nehorším druhem vymřít ještě jeden, *náhodně vybraný* druh.

Kritický bod je teď přesně  $f_c = 1/2$ .

Kritické chování v  $f_c$ : intervaly mezi dobami, kde všechny druhy mají zdraví  $> f_c$  mají rozdělení s  $\mathbb{P}[\tau \geq k] \sim k^{-1/2}$ .

# Samo-organizovaná kritikalita

Všechny modely mají společné znaky:

- ▶ Jediná struktura, která je důležitá pro interakci mezi body, jejich úspořádání.
- ▶ Všechny modely obsahují pravidlo typu “zabijte nejnižší částici” .
- ▶ Všechny modely ukazují *samo-organizovanou kritikalitu*.

# Samo-organizovaná kritikalita

Fysikální systémy s fázovým přechodem druhého řádu ukazují *kritické chování* v bodě fázového přechodu. Takové chování je karakterizováno následujícími jevy:

- ▶ Stálost při skálování
- ▶ Korelace klesají jako záporná mocnina vzdálenosti či času.
- ▶ Kritické exponenty

Obecně lze kritické chování pozorovat pouze pokud parametry jako třeba teplota mají přesně danou hodnotu tak, že se nacházíme v bodě fázového přechodu. Proto tomu bodu také říkáme *kritický bod*.

# Samo-organizovaná kritikalita

Některé fysikální systémy ukazují kritické chování i bez nutnosti nastavovat parametry na přesnou hodnotu nějakého kritického bodu.

Obzvlášť to platí pro takové systémy, které kritický bod samy vyhledávají. Od takových systémů se říká, že ukazují *samo-organizovanou kritikalitu*.

Klasický příklad jsou hromady písku. Ty samy vyhledávají největší úhel svahu, při kterém jsou ještě stabilní. Přidáním jednoho zrna na takový svah způsobíme miniaturní lavinu. Pravděpodobnost, že taková lavinka je větší než  $k$  klesá jako záporná mocnina  $k$ .

Bak-Sneppenův model je další klasický příklad, který hraje důležitou roli v Bakově knize (1996).

V emailové komunikaci, rozdelení doby čekání na odpověď má "mocninové rozdělení", na rozdíl od běžných exponenciálních rozdělení v teorii hromadné obsluhy.