## Výpočet distribuční funkce z hustoty pravděpodobnosti

Máme hp

$$f(x) = 1 - |x - 1| \ \text{ pro } \ x \in (0, 2)$$

Určete distribuční funkci $F(x)$.

Vzorec pro výpočet je

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

Poznámka: *Všimněme si, že se jedná o integrál s proměnnou v horní mezi. Tedy pro každé $x$ je $F(x)$ dána integrálem od $-\infty$ až do $x$.*

Hustota pravděpodobnosti je definována po částech:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \in (0,1) \\ 2 - x & x \in (1,2) \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

Musíme ji proto počítat odděleně na těchto intervalech.

1. $x < 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 dt = 0; \quad F(0) = 0$$

2. $x \in (0,1)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\, d(t) + \int_{0}^{x} f(t)\, dt =$$

$$F(0) + \int_{0}^{x} t\, dt = 0 + \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^x = \frac{1}{2}x^2$$

a $F(1) = \frac{1}{2}$.

Poznámka: *Integrujeme od $-\infty$ do $x$. Od $-\infty$ do 0 naintegrujeme 0 a dále, na intervalu $(0,1)$ to je $\frac{1}{2}x^2$. Ale celé to platí je pro $x \in (0,1)$.*

3. $x \in (1,2)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{1} f(t)\, dt + \int_{1}^{x} (2 - t)\, dt =$$

$$= F(1) + \left[2t - \frac{1}{2}t^2\right]_1^x = \frac{1}{2} + 2x - \frac{1}{2}x^2 - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$$

a $F(2) = 1$, což je kontrola, protože na konci $F(x)$ musí být 1.

Celá distribuční funkce tedy je

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & x \in (0,1) \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 & x \in (1,2) \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

Pro srovnání spočteme ještě střední hodnotu. Tam se integruje od -$\infty$ do $\infty$. Není tam proměnná horní mez, takže i když se musí integrovat na jednotlivých intervalech zvlášť - jsou tam jiné předpisy pro hp, budeme prostě integrály sčítat.

$$E\left[X\right]=\int_{-\infty}^{\infty}xf\left(x\right)dx=$$

$$=0+\int_{0}^{1}x\underbrace{x}_{f(x)}dx+\int_{1}^{2}x\left(2-x\right)dx+0=$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^{3}\right]_{0}^{1}+\left[x^{2}-\frac{1}{3}x^{3}\right]_{1}^{2}=\frac{1}{3}+4-\frac{8}{3}-\left(1-\frac{1}{3}\right)=1$$

Poznámka: *Hustota pravděpodobnosti je stříška na intervalu* $(0,2)$ *s vrcholkem nad bodem 1. Střední hodnota tedy správně vyšla 1.*