

Dvourozměrné normální

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E[X] \\ E[Y] \end{bmatrix} \right)' \Sigma^{-1} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E[X] \\ E[Y] \end{bmatrix} \right) \right\}$$

kde Σ je kovarianční matice (určuje tvar) a $|\Sigma|$ je determinant.

Vliv nenulové střední hodnoty je jasný - gaussovka se posune vrcholem do bodu, určeným střední hodnotou.

Vliv kovarianční matice je složitější. Platí

- kovarianční matice

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

určuje symetrickou hp s vrstevnicemi ve tvaru kružnice,

- kovarianční matice

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

bude protažená ve směru x - prvek $\Sigma_{11} > \Sigma_{22}$. Vrstevnice budou elipsy s osami vodorovnými se souřadnými osami x, y ,

- kovarianční matice

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bude naopak - protažená ve směru osy y

- kovarianční matice

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

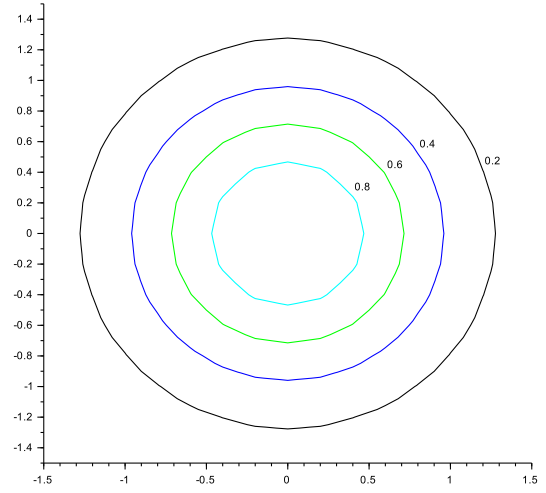
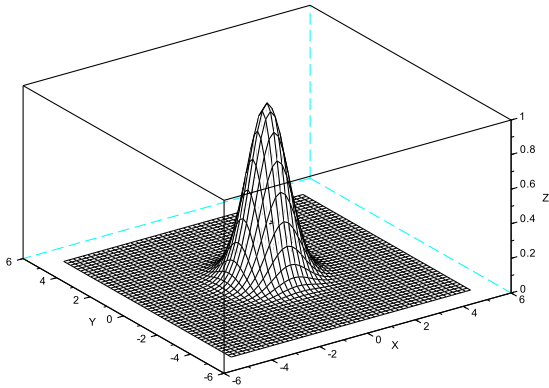
bude protažená ve směru osy x , ale bude pootočená proti směru hodinových ručiček,

- kovarianční matice

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & -0.2 \\ -0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

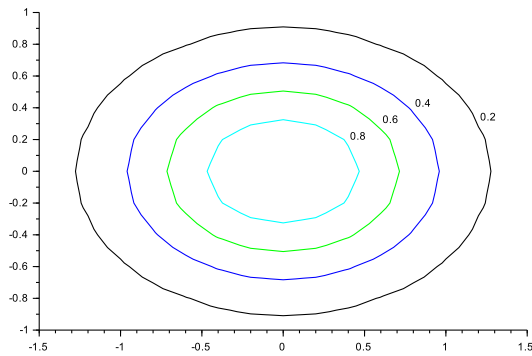
bude protažená ve směru osy x a bude pootočená po směru hodinových ručiček.

Tohle je 3D obrázek základní gaussovky

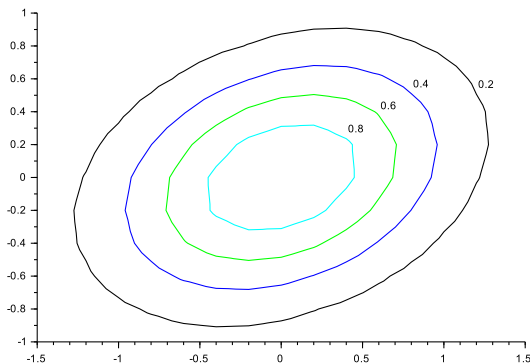


Na následujících obrázcích jsou gaussovky s různými kovariančními maticemi. Jedná se o pohled zhora a vidět jsou vrstevnice.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$



$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$



Příklad (normální rozdělení)

Výška vojenského automobilu je 2m 15cm s rozptylem 5 cm. Po silnici jede kolona těchto automobilů a před ní je most vysoký 2m 30cm. Jaká je pravděpodobnost, že

- (i) první auto projede,
- (ii) páté auto projede

Řešení

Výška auta je náhodná veličina X s normálním rozdělením se střední hodnotou 2.15 a rozptylem 0.05.

Rozptyl 5 dá směrodatnou odchylku $\sqrt{0.05} = 0.224$

- (i) První projede

$$P(X \leq 2.3) = F(2.3) = 0.748$$

ve Scilabu: `cdfnor("PQ", 2.3, 2.15, 0.224)`

- (ii) Pátý projede: aby projel pátý, musí ti před ním taky projet. Tedy

$$P = 0.527^5 = 0.235$$