Příklady z pravděpodobnosti

Příklad 1

Je dáno rozdělení s hustotou pravděpodobnosti

$$f(x) = 2 - 2x, \quad x \in (0,\, 1)\,.$$

Z rozdělení jsme generovali realizaci výběru

$$[0.23,\, 0.48,\, 0.97,\, 0.33,\, 0.12]$$

Určete a) střední hodnotu a rozptyl populace a b) střední hodnotu a rozptyl výběru.

Poznámka: Populace, soubor a náhodná veličina mají v tomto kontextu stejný význam.

Řešení

a) Populace

$$E[X] = \int_0^1 x(2-2x)\,dx = \int_0^1 \left(2x - 2x^2\right) dx = \left[x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$D[X] = \int_0^1 (x - \frac{1}{3})^2\,(2-2x)\,dx = \frac{1}{18}$$

b) Výběr

$$\bar{x} = \frac{1}{5}\,(0.23 + 0.48 + 0.97 + 0.33 + 0.12) = 0.426$$

$$s^2 = \frac{1}{5-1}\left[(0.23 - 0.426)^2 + (0.48 - 0.426)^2 \cdots (0.12 - 0.426)^2\right] = 0.11$$

Příklad 2

Je dána pravděpodobnostní funkce $f(x)$

x	1	3	4	6	9
$f(x)$	p	$2p$	0.1	$0.3 - p$	0.2

Určete střední hodnotu, rozptyl a modus rozdělení.

Řešení

Nejprve je třeba určit konstantu p tak, aby uvedená tabulka skutečně představovala pravděpodobnostní funkci. Tedy všechny pravděpodobnosti jsou nezáporné a jejich součet je jedna.

$$p + 2p + 0.1 + 0.3 - p + 0.2 = 1$$

$$p = 0.2$$

Tabulka nyní bude

x	1	3	4	6	9
$f(x)$	0.2	0.4	0.1	0.1	0.2

Potom

$$E[X] = 1 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.4 + 4 \cdot 0.1 + 6 \cdot 0.1 + 9 \cdot 0.2 = 4.2$$

$$D[X] = (1 - 4.2)^2 \cdot 0.2 + (3 - 4.2)^2 \cdot 0.4 \cdots (9 - 4.2)^2 \cdot 0.2 = 7.56$$

Modus je hodnota s největší pravděpodobností, tedy $\hat{x} = 3$.

Příklad 3

Je dána pravděpodobnostní funkce

$$f(x) = \frac{5 - x}{10}, \quad x = 1, 2, 3, 4$$

Určete střední hodnotu rozdělení.

Řešení

I když předpis pro pravděpodobnostní funkci je dán spojitou funkcí, jedná se o diskrétní náhodnou veličinu, protože počet hodnot x je konečný. Můžeme tedy pravděpodobnostní funkci vyjádřit jako tabulku, ve které pravděpodobnosti dostaneme dosazením do $f(x)$

x	1	2	3	4
$f(x)$	0.4	0.3	0.2	0.1

Střední hodnota je

$$E[X] = 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.1 = 2$$

Příklad 4

Pro rovnoměrné rozdělení na intervalu (0, 15) určete 5% kvantil.

Řešení

Toto rovnoměrné rozdělení má hustotu pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{15} & x \in (0, 15) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}.$$

Podle definice je 5% kvantil ζ určen vztahem

$$\int_0^{\zeta} f(x)\, dx = 0.05$$

a tedy platí

$$\int_0^{\zeta} \frac{1}{15} dx = 0.05$$

$$\frac{\zeta}{15} = 0.05$$

$$\zeta = 0.75$$

Příklad 5

Dokažte, že

$$E[X - E[X]] = 0.$$

Řešení

$$E[X - E[X]] = E[X] - E[E[X]] = E[X] - E[X] = 0$$

nebo podrobněji - $E[X]$ označíme jako μ

$$E[X - E[X]] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X]) f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu) f(x)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx - \mu \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \mu - \mu,$$

protože $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$.

Příklad 6

Jsou dány dvě náhodné veličiny X_1 a X_2 se sdruženou hustotou pravděpodobnosti

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{15}(x_1 + x_2 + 1) \quad \text{pro} \quad x_1 = 0, 1, 2; \quad x_2 = 0, 1$$

Určete střední hodnotu a kovarianční matici.

Řešení

Marginální hustoty:

$f(x_1, x_2)$	$x_2 = 0$	$x_2 = 1$	$f(x_1)$
$x_1 = 0$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$
$x_2 = 1$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{3}$
$x_3 = 2$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{7}{15}$
$f(x_2)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	1

Střední hodnota:

$$\begin{aligned} E(x_1) &= 0 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{7}{15} = \frac{19}{15} = 1\frac{4}{5} \\ E(x_2) &= 0 \cdot \frac{2}{5} + 1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Rozptyl:

$$\begin{aligned} D(x_1) &= (0 - \frac{19}{15})^2 \frac{1}{5} + (1 - \frac{19}{15})^2 \frac{1}{3} + (2 - \frac{19}{15})^2 \frac{7}{15} = \frac{134}{225} \\ D(x_2) &= (0 - \frac{3}{5})^2 \frac{2}{5} + (1 - \frac{3}{5})^2 \frac{3}{5} = \frac{24}{125} \end{aligned}$$

Kovariance:

$$\begin{aligned} cov(x_1, x_2) &= (0 - \frac{19}{15})(0 - \frac{3}{5})\frac{1}{15} + (0 - \frac{19}{15})(1 - \frac{3}{5})\frac{2}{15} + \\ &+ (1 - \frac{19}{15})(0 - \frac{3}{5})\frac{2}{15} + (1 - \frac{19}{15})(1 - \frac{3}{5})\frac{3}{15} + \\ &+ (2 - \frac{19}{15})(0 - \frac{3}{5})\frac{3}{15} + (2 - \frac{19}{15})(1 - \frac{3}{5})\frac{4}{15} = -\frac{2}{75} \end{aligned}$$

Kovarianční matice:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{134}{225} & -\frac{2}{75} \\ -\frac{2}{75} & \frac{24}{125} \end{bmatrix}$$

Příklad 7

Jsou dány dvě náhodné veličiny X_1 a X_2 se sdruženou hustotou pravděpodobnosti

$$f(x_1, x_2) = e^{-x_1-x_2} \quad \text{pro} \quad x_1, x_2 \in (0, \infty)$$

Určete střední hodnotu a kovarianční matici.

Řešení

Marginální hustoty:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \int_0^\infty e^{-x_1-x_2} dx_2 = e^{-x_1} \left[-e^{-x_2}\right]_0^\infty = e^{-x_1} \\ f(x_2) &= e^{-x_2} \end{aligned}$$

Střední hodnota:

$$\begin{aligned} E(x_1) &= \int_0^\infty x_1 e^{-x_1} dx_1 = \left| \begin{array}{ll} u = x_1 & u' = 1 \\ v' = e^{-x_1} & v = -e^{-x_1} \end{array} \right| = \left[-x_1 e^{-x_1}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x_1} dx_1 = \\ &= \left[-e^{-x_1}\right]_0^\infty = 1 \\ E(x_2) &= 1 \end{aligned}$$

Rozptyl:

$$\begin{aligned} D(x_1) &= \int_0^\infty (x_1 - 1)^2 e^{-x_1} dx_1 = \int_0^\infty x_1^2 e^{-x_1} dx_1 - 2\int_0^\infty x_1 e^{-x_1} dx_1 + \int_0^\infty e^{-x_1} dx_1 = \\ &= \int_0^\infty x_1^2 e^{-x_1} dx_1 - 1 = \left| \begin{array}{ll} u = x_1^2 & u' = 2x_1 \\ v' = e^{-x_1} & v = -e^{-x_1} \end{array} \right| \\ &= \left[-x_1^2 e^{-x_1}\right]_0^\infty + 2\int_0^\infty x_1 e^{-x_1} dx_1 - 1 = 1 \\ D(x_2) &= 1 \end{aligned}$$

Kovariance:

$$\begin{aligned} cov(x_1, x_2) &= \int_0^\infty \int_0^\infty (x_1 - 1)(x_2 - 1) e^{-x_1-x_2} dx_1 dx_2 = \\ &= \int_0^\infty (x_1 - 1) e^{-x_1} dx_1 \int_0^\infty (x_2 - 1) e^{-x_2} dx_2 = \\ &= \left(\int_0^\infty x e^{-x} dx - \int_0^\infty e^{-x} dx \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

Kovarianční matice:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Příklad 8

Je dáno rozdělení $f_X(x) = N(0,1)$. Určete hustotu pravděpodobnosti $f_Y(y)$ náhodné veličiny Y která je transformací náhodné veličiny X podle funkce $y = \sqrt{|x|}$.

Řešení

Inverzní funkce k transformační je $y^2 = |x|$ a tedy

$$x = \begin{cases} y^2 & x \geq 0 \\ -y^2 & x < 0 \end{cases}$$

Její derivace

$$\frac{dx}{dy} = \begin{cases} 2y & x \geq 0 \\ -2y & x < 0 \end{cases}$$

Použijeme obecný vzorec pro transformaci,

$$f_Y(y) = f_X(x) \left|\frac{dx}{dy}\right|$$

který ovšem platí jen pro monotónní transformační funkci. Naše funkce je rostoucí pro $x \geq 0$ a klesající pro $x < 0$. Musíme proto úlohu rozdělit na dvě části:

a) $x \geq 0$

$$f_Y(y) = f_X\left(y^2\right)|2y| = 2yf_X\left(y^2\right)$$

b) $x < 0$

$$f_Y(y) = f_X\left(-y^2\right)|-2y| = 2yf_X\left(-y^2\right)$$

Pro normální rozdělení $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}x^2\right\}$ nakonec dostáváme jediný předpis

$$f_Y(y) = \frac{2y}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}y^4\right\}, \quad x \in R$$