Příklad 1

Házíme dvěma kostkami. S jakou pravděpodobností padne součet větší než 10?

Řešení:

Hodnoty (součtů) 2,3,$\cdots$, 12.

Četnosti (hodnot) získáme, když nakreslíme hody do matice: první kostka dolu, druhá doprava.

S	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Podle toho jsou četnosti.

součty	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
četnosti	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

a pravděpodobnostní funkci dostaneme, dělením 36, což je počet všech možných hodů dvěma kostkami

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Zadání 1

Jaká je pravděpodobnost, že padne menší než 4?

Řešení: Menší než 4 je $\{2,3\}$. Podle tabulky četností jsou 3 příznivé možnosti, počet všech možností je 36. Tedy

$$P(X<4)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

Podobně podle pravděpodobnostní funkce

$$P(X<4)=\frac{1}{36}+\frac{1}{18}=\frac{1}{12}$$

Zadání 2

Padne menší než 4 za podmínky, že nepadla 6 ani na jedné z kostek.

Řešení: Z podmínky máme prostor všech výsledků je dán maticí 5×5, tedy

$$\{1,2,3,4,5\}\times\{1,2,3,4,5\}$$

což dá 25 možných hodů. Příznivé jsou stále ty 3. Je tedy

$$P\left(X < 4|\text{ne } 6\right) = \frac{3}{25}$$

Odtud je vidět, že jevy "padne menší než 4" a "nepadne žádná 6" jsou závislé (což je pochopitelné - kaž padne 6, nemůže být součet menší než 4; když tedy víme, že nepadla 6, budeme spíše hlasovat pro součet menší než 4)

Příklad 2

V krabici máme 2 korálky bíle a 3 modré. Losujeme 2 korálky. Jaká je pravděpodobnost, že v druhém tahu dostaneme bílý korálek.

Označíme $1b$ bílý v prvém tahu, $1m$ modrý v prvém tahu, $2b$ bílý v druhém tahu a $2m$ modrý v druhém tahu. Potom např. $2b|1b$ znamená bílý v druhém tahu, když v prvém tahu byl také bílý.

Zadání 1

Losujeme korálky tak, že první vytažený nevrátíme.

V prvém tahu je to jasné (podle počtu korálků v krabici):

$$P\left(1b\right) = \tfrac{2}{5},\ P\left(1m\right) = \tfrac{3}{5}.$$

V druhém tahu jsme v potížích, protože neznáme aktuální stav krabice. Závisí na tom, co bylo vytažené v prvním tahu. Můžeme ale psát podmíněné pravděpodobnosti

$$P\left(2b|1b\right) = \tfrac{1}{4},\ P\left(2b|1m\right) = \tfrac{2}{4},\ P\left(2m|1b\right) = \tfrac{3}{4},\ P\left(2m|1m\right) = \tfrac{2}{4}$$

Co chceme je $P\left(2b\right)$. To je $P\left(1b, 2b\right) + P\left(1m, 2b\right)$ - táhneme buď první b a druhý b nebo první m a druhý b (to je vlastně marginála z $P\left(1tah, 2tah = b\right)$, tedy $\sum_{1tah} P\left(1tah, 2tah = b\right)$. A sdružené pravděpodobnosti rozložíme na podmíněné a marginální; tedy

$$P\left(2b\right) = P\left(1b, 2b\right) + P\left(1m, 2b\right) =$$

$$= P\left(2b|1b\right) P\left(1b\right) + P\left(2b|1m\right) P\left(1m\right)$$

a všechny tyto pravděpodobnosti již umíme určit. Tedy

$$P\left(2b\right) = \frac{1}{4}\frac{2}{5} + \frac{2}{4}\frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

Zadání 2

Losujeme tak, že první tažený korálek vrátíme.

Potom situace před druhém tahem je stejná jako před prvním a platí

$$P\left(1b\right) = \tfrac{2}{5},\ P\left(1m\right) = \tfrac{3}{5},\ P\left(2b\right) = \tfrac{2}{5},\ P\left(2m\right) = \tfrac{3}{5}$$

První a druhý tah jsou nezávislé.

Dodatky

Rovnice, která nám vyšla v poslední příkladu se nazývá **vzorec pro úplnou pravděpodobnost.** Obecně pro jevy A a B_1, B_2, $\cdots B_k$ platí

$$P(A) = P(A|B_1)\, P(B_1) + P(A|B_2)\, P(B_2) + \cdots + P(A|B_k)\, P(B_k)$$

Tento vzorec počítá pravděpodobnost jevu A když jej známe jen za okolností B_i.

Další podobný vztah je **Bayesův vzorec**

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)\, P(B_k)}{P(A)},$$

kde $P(A)$ spočteme pomocí úplné pravděpodobnosti. Tento vzorec obrací jev A a jeho podmínku B_k.