Přednáška 11 – Řízení s diskrétním modelem

Informace ke zkoušce:

- Poslední přednáška, konzultace, předtermíny
- Termíny
- Zkouška – 5 otázek ústně
- Doktorandi

Řízení s diskrétním modelem – optimalizace u_t (vývoj y_t)

Dynamické programování

1. Výpočet střední hodnoty
   $\varphi_t = E[\varphi^*_{t+1} + J_t | u_t, d(t-1)]$
2. Minimalizace $\varphi^*_t = \min_{u_t} \varphi_t$

Pro čas $t = N, N-1, N-2, \ldots, 1$

$\varphi^*_{N+1} = 0$

Výsledek: $u^*_t = \arg\min \varphi_t(d(t-1))$

Příklad: $u_t \in \{1, 2\}$ – semafor (zelená, červená), $y_t \in \{1, 2\}$ – jízdní pruh

Model $f(y_t | u_t, y_{t-1}, \Theta)$

ψ_t \ y_t	1	2
$u_t = 1, y_{t-1} = 1$	0.7	0.3
$u_t = 1, y_{t-1} = 2$	0.2	0.8
$u_t = 2, y_{t-1} = 1$	0.9	0.1
$u_t = 2, y_{t-1} = 2$	0.4	0.6

Penalizační funkce J_t

ψ_t \ y_t	1	2
$u_t = 1, y_{t-1} = 1$	10	15
$u_t = 1, y_{t-1} = 2$	15	10
$u_t = 2, y_{t-1} = 1$	20	25
$u_t = 2, y_{t-1} = 2$	25	20

Nižší penalizace požadované hodnoty

Příklad 2: $u_t \in \{1, 2, 3\}$ – semafor (zelená, žlutá, červená)

$y_t \in \{1, \ldots, 5\}$ – stupeň dopravy, $v_t \in \{1, \ldots, 7\}$ – den v týdnu

Model $f(y_t | u_t, v_t, y_{t-1}, \Theta)$

Příklad řízení s diskrétním modelem pro $N = 3,\ t = N$

Krok $t = N = 3$, počáteční podmínky $\varphi_4^* = 0$

Střední hodnota: $\varphi_3 = E\left[J_t | u_3, d(2)\right] = \sum_{y_3=1}^{2} J_t \Theta =$

$$= \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \\ 25 \end{bmatrix} .* \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.2 \\ 0.9 \\ 0.4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \\ 25 \\ 20 \end{bmatrix} .* \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.8 \\ 0.1 \\ 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 18 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4.5 \\ 8 \\ 2.5 \\ 12 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 11.5 \\ 11 \\ 20.5 \\ 22 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cdots \ \mathbf{u_3 = 1,\ y_2 = 1} \\ \cdots \ \mathbf{u_3 = 1,\ y_2 = 2} \\ \cdots \ \mathbf{u_3 = 2,\ y_2 = 1} \\ \cdots \ \mathbf{u_3 = 2,\ y_2 = 2} \end{array}$$

Minimalizace:

Pro $y_2 = 1$: $\min\{11.5, 20.5\} = 11.5,\ u_3^* = 1$

Pro $y_2 = 2$: $\min\{11, 22\} = 11,\ u_3^* = 1$

φ_3^*

ψ_t \ y_t	1	2
$u_2 = 1, y_1 = 1$	11.5	11
$u_2 = 1, y_1 = 2$	11.5	11
$u_2 = 2, y_1 = 1$	11.5	11
$u_2 = 2, y_1 = 2$	11.5	11

Příklad řízení s diskrétním modelem, $t = N - 1$

Krok $t = N - 1 = 2$

<u>Střední hodnota:</u> $\varphi_2 = E\left[J_t + \varphi_3^* | u_2, d(1)\right] = \sum_{y_2=1}^{2} (J_t + \varphi_3^*)\,\Theta =$

$$= \left(\begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \\ 25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11.5 \\ 11.5 \\ 11.5 \\ 11.5 \end{bmatrix} \right) .* \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.2 \\ 0.9 \\ 0.4 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 15 \\ 10 \\ 25 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 \\ 11 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix} \right) .* \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.8 \\ 0.1 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22.85 \\ 22.1 \\ 31.95 \\ 33.2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cdots \quad \mathbf{u_2 = 1,\ y_1 = 1} \\ \cdots \quad \mathbf{u_2 = 1,\ y_1 = 2} \\ \cdots \quad \mathbf{u_2 = 2,\ y_1 = 1} \\ \cdots \quad \mathbf{u_2 = 2,\ y_1 = 2} \end{array}$$

<u>Minimalizace:</u>

Pro $y_1 = 1$:

$\min\{22.85, 31.95\} = 22.85,\ u_2^* = 1$

Pro $y_1 = 2$:

$\min\{22.1, 33.2\} = 22.1,\ u_2^* = 1$

φ_2^*

ψ_t \ y_t	1	2
$u_1 = 1, y_0 = 1$	22.85	22.1
$u_1 = 1, y_0 = 2$	22.85	22.1
$u_1 = 2, y_0 = 1$	22.85	22.1
$u_1 = 2, y_0 = 2$	22.85	22.1

Příklad řízení s diskrétním modelem, $t = N - 2$

Krok $t = N - 2 = 1$

Střední hodnota: $\varphi_1 = E\left[J_t + \varphi_2^* | u_1, d(0)\right] = \sum_{y_1=1}^{2} \left(J_t + \varphi_2^*\right)\Theta =$

$$= \left(\begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \\ 25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 22.85 \\ 22.85 \\ 22.85 \\ 22.85 \end{bmatrix}\right) .* \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.2 \\ 0.9 \\ 0.4 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 15 \\ 10 \\ 25 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 22.1 \\ 22.1 \\ 22.1 \\ 22.1 \end{bmatrix}\right) .* \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.8 \\ 0.1 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 34.125 \\ 33.25 \\ 43.275 \\ 44.4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cdots \quad \mathbf{u_1 = 1,\ y_0 = 1} \\ \cdots \quad \mathbf{u_1 = 1,\ y_0 = 2} \\ \cdots \quad \mathbf{u_1 = 2,\ y_0 = 1} \\ \cdots \quad \mathbf{u_1 = 2,\ y_0 = 2} \end{array}$$

Minimalizace:

Pro $y_0 = 1$:

$\min\{34.125, 43.275\} = 34.125$, $u_1^* = 1$

Pro $y_0 = 2$:

$\min\{33.25, 44.4\} = 33.25$, $u_1^* = 1$

φ_1^*

34.125, 33.25

Použití optimálního řízení

Počáteční podmínky: $y_0 = 2$

1. Čas $t = 1$

   $\psi_t = [u_1^* = 1, y_0 = 2], \quad y_1 = 2$
2. Čas $t = 2$

   $\psi_t = [u_2^* = 1, y_1 = 2], \quad y_2 = 1$
3. Čas $t = 3$

   $\psi_t = [u_3^* = 1, y_2 = 1], \quad y_3 = 1$

Poznámka: neurčitost

Penalizace po použití optimálního řízení:

$$\overbrace{J_{2|12}}^{t=1} + \overbrace{J_{1|12}}^{t=2} + \overbrace{J_{1|11}}^{t=3} = 10 + 15 + 10 = 35$$

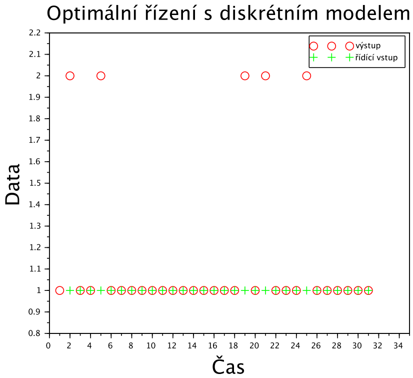
Rozdíl oproti φ_1^* – střední hodnota

Model $f(y_t|u_t, y_{t-1}, \Theta)$

ψ_t \ y_t	1	2
$u_t = 1, y_{t-1} = 1$	0.7	0.3
$u_t = 1, y_{t-1} = 2$	0.2	0.8
$u_t = 2, y_{t-1} = 1,$	0.9	0.1
$u_t = 2, y_{t-1} = 2$	0.4	0.6

Penalizační funkce J_t

ψ_t \ y_t	1	2
$u_t = 1, y_{t-1} = 1$	10	15
$u_t = 1, y_{t-1} = 2$	15	10
$u_t = 2, y_{t-1} = 1$	20	25
$u_t = 2, y_{t-1} = 2$	25	20




```
clear, clc, close
nh=30; % interval řízení
y0=1; % počáteční podmínky
om=[10 15; 15 10; 20 25; 25 20]; % penalizační funkce
th=[.7 .3; .2 .8; .9 .1; .4 .6]; % model
fi=zeros(1,2); % počáteční podmínky
% dynamické programování
```

```
for t=nh:-1:1
   fp=om+ones(4,1)*fi; % penalizační funkce + fi
   f=sum((fp.*th),'c'); % střední hodnota
% minimalizace
    if f(1)<f(3), % pro y(t-1)=1
     % optimální řízení, minimální penalizace
     uo(t,1)=1; fi(1)=f(1);
    else
     uo(t,1)=2; fi(1)=f(3);
    end
    if f(2)<f(4), % pro y(t-1)=2
     uo(t,2)=1; fi(2)=f(2);
     else
     uo(t,2)=2; fi(2)=f(4);
    end
end
J=fi(y0); % minimální střední hodnota penalizační funkce
% použití optimálního řízení
y(1)=y0;
```

```
for t=1:nh
u(t+1)=uo(t,y(t)); % optimální řídící vstup
j=2*(y(t)-1)+u(t+1); % číslo řádku z modelu
y(t+1)=(rand(1,1)>th(j,1))+1; % výstup
end
```