Inference v bayesovských sítích

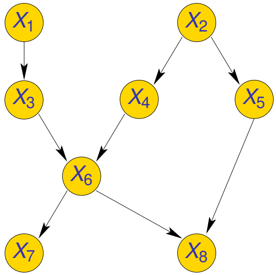
Jiří Vomlel

ÚTIA, Akademie věd ČR
http://www.utia.cas.cz/vomlel

24. listopadu 2010

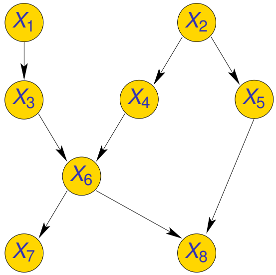
Jednoduchý příklad z medicíny

X_1 "Pobyt v Asii"
X_2 "Kuřák"
X_3 "Tuberkulóza"
X_4 "Rakovina plic"
X_5 "Zánět průdušek"
X_6 "Tuberkulóza nebo rakovina"
X_7 "Positivní rentgenový nález"
X_8 "Dušnost"



Jednoduchý příklad z medicíny

X_1	“Pobyt v Asii”
X_2	“Kuřák”
X_3	“Tuberkulóza”
X_4	“Rakovina plic”
X_5	“Zánět průdušek”
X_6	“Tuberkulóza nebo rakovina”
X_7	“Positivní rentgenový nález”
X_8	“Dušnost”

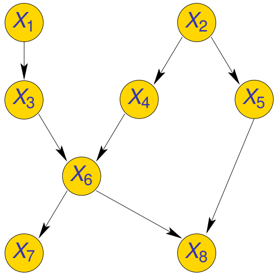


Sdružená pravděpodobnostní distribuce definovaná bayesovskou sítí:

$$P(X_1, X_2, \ldots, X_8) = \prod_{i=1}^{8} P(X_i | \{X_j\}_{j \in Pa(i)})$$

Jednoduchý příklad z medicíny

X_1	"Pobyt v Asii"
X_2	"Kuřák"
X_3	"Tuberkulóza"
X_4	"Rakovina plic"
X_5	"Zánět průdušek"
X_6	"Tuberkulóza nebo rakovina"
X_7	"Positivní rentgenový nález"
X_8	"Dušnost"



Sdružená pravděpodobnostní distribuce definovaná bayesovskou sítí:

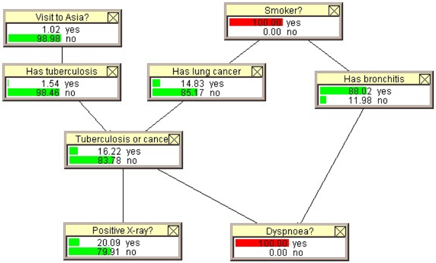
$$
\begin{aligned}
P(X_1, X_2, \ldots, X_8) &= \prod_{i=1}^{8} P(X_i | \{X_j\}_{j \in Pa(i)}) \\
&= P(X_8|X_6, X_5) \cdot P(X_7|X_6) \cdot P(X_6|X_3, X_4) \\
&\quad \cdot P(X_5|X_2) \cdot P(X_4|X_2) \cdot P(X_3|X_1) \cdot P(X_2) \cdot P(X_1)
\end{aligned}
$$

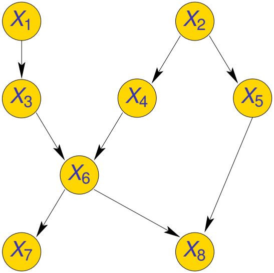
Podmíněná pravděpodobnost

“Jaká je pravděpodobnost, že pacient má tuberkulózu když víme, že je kuřák a trpí dušností?”

Podmíněná pravděpodobnost

“Jaká je pravděpodobnost, že pacient má tuberkulózu když víme, že je kuřák a trpí dušností?”

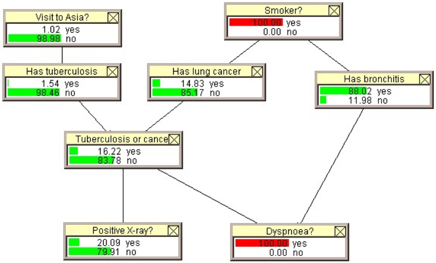


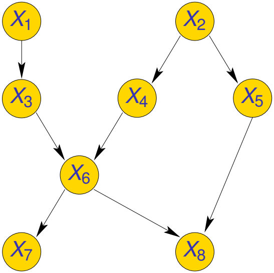


$$P(X_3, | X_2 = 1, X_8 = 1) \quad = \quad \frac{P(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1)}{P(X_2 = 1, X_8 = 1)}$$

Podmíněná pravděpodobnost

“Jaká je pravděpodobnost, že pacient má tuberkulózu když víme, že je kuřák a trpí dušností?”

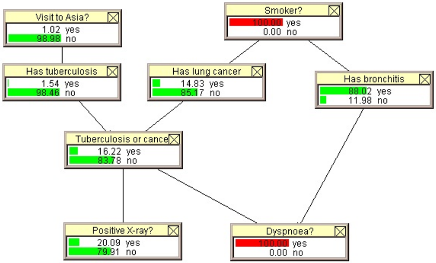


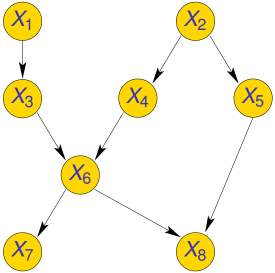


$$P(X_3, | X_2 = 1, X_8 = 1) \quad = \quad \frac{P(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1)}{\sum_{X_3} P(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1)}$$

Podmíněná pravděpodobnost

"Jaká je pravděpodobnost, že pacient má tuberkulózu když víme, že je kuřák a trpí dušností?"





$$P(X_3, | X_2 = 1, X_8 = 1) = \frac{P(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1)}{\sum_{X_3} P(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1)}$$

$$P(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1) = \sum_{X_1, X_4, X_5, X_6, X_7} P(X_1, X_2 = 1, X_3, \ldots, X_7, X_8 = 1)$$

Distributivní zákon pro pravděpodobnostní distribuce

$$P(X,Y)\cdot P(Y,Z) = \begin{array}{|c|cc|} \hline & X=0 & X=1 \\ \hline Y=0 & a & c \\ Y=1 & b & d \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|cc|} \hline & Z=0 & Z=1 \\ \hline Y=0 & e & g \\ Y=1 & f & h \\ \hline \end{array}$$

Distributivní zákon pro pravděpodobnostní distribuce

$$P(X,Y) \cdot P(Y,Z) = \begin{array}{|c|cc|} \hline & X=0 & X=1 \\ \hline Y=0 & a & c \\ Y=1 & b & d \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|cc|} \hline & Z=0 & Z=1 \\ \hline Y=0 & e & g \\ Y=1 & f & h \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|cccc|} \hline & \multicolumn{2}{c}{X=0} & \multicolumn{2}{c|}{X=1} \\ & Z=0 & Z=1 & Z=0 & Z=1 \\ \hline Y=0 & ae & ag & ce & cg \\ Y=1 & bf & bh & df & dh \\ \hline \end{array}$$

Distributivní zákon pro pravděpodobnostní distribuce

$$P(X,Y)\cdot P(Y,Z) = \begin{array}{|c|cc|}\hline & X=0 & X=1 \\ \hline Y=0 & a & c \\ Y=1 & b & d \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|cc|}\hline & Z=0 & Z=1 \\ \hline Y=0 & e & g \\ Y=1 & f & h \\ \hline\end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|cccc|}\hline & X=0 & & X=1 & \\ & Z=0 & Z=1 & Z=0 & Z=1 \\ \hline Y=0 & ae & ag & ce & cg \\ Y=1 & bf & bh & df & dh \\ \hline\end{array}$$

$$\sum_Z P(X,Y)\cdot P(Y,Z) = \begin{array}{|c|cc|}\hline & X=0 & X=1 \\ \hline Y=0 & ae+ag & ce+cg \\ Y=1 & bf+bh & df+dh \\ \hline\end{array} =$$

Distributivní zákon pro pravděpodobnostní distribuce

$$P(X,Y)\cdot P(Y,Z) = \begin{array}{|c|cc|}\hline & X=0 & X=1 \\ \hline Y=0 & a & c \\ Y=1 & b & d \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|cc|}\hline & Z=0 & Z=1 \\ \hline Y=0 & e & g \\ Y=1 & f & h \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|cccc|}\hline & \multicolumn{2}{c}{X=0} & \multicolumn{2}{c|}{X=1} \\ & Z=0 & Z=1 & Z=0 & Z=1 \\ \hline Y=0 & ae & ag & ce & cg \\ Y=1 & bf & bh & df & dh \\ \hline \end{array}$$

$$\sum_Z P(X,Y)\cdot P(Y,Z) = \begin{array}{|c|cc|}\hline & X=0 & X=1 \\ \hline Y=0 & ae+ag & ce+cg \\ Y=1 & bf+bh & df+dh \\ \hline \end{array} =$$

$$P(X,Y)\cdot \sum_Z P(Y,Z)$$

Distributivní zákon pro pravděpodobnostní distribuce

$$P(X,Y)\cdot P(Y,Z) = \begin{array}{|c|cc|}\hline & X=0 & X=1 \\ \hline Y=0 & a & c \\ Y=1 & b & d \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|cc|}\hline & Z=0 & Z=1 \\ \hline Y=0 & e & g \\ Y=1 & f & h \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|cccc|}\hline & \multicolumn{2}{c}{X=0} & \multicolumn{2}{c|}{X=1} \\ & Z=0 & Z=1 & Z=0 & Z=1 \\ \hline Y=0 & ae & ag & ce & cg \\ Y=1 & bf & bh & df & dh \\ \hline \end{array}$$

$$\sum_Z P(X,Y)\cdot P(Y,Z) = \begin{array}{|c|cc|}\hline & X=0 & X=1 \\ \hline Y=0 & ae+ag & ce+cg \\ Y=1 & bf+bh & df+dh \\ \hline \end{array} =$$

$$P(X,Y)\cdot \sum_Z P(Y,Z) = \begin{array}{|c|cc|}\hline & X=0 & X=1 \\ \hline Y=0 & a & c \\ Y=1 & b & d \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline Y=0 & e+g \\ Y=1 & f+h \\ \hline \end{array}$$

Přímý výpočet marginální pravděpodobnosti

$$P(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1)$$
$$= \sum_{X_1, X_4, X_5, X_6, X_7} P(X_1, X_2 = 1, X_3, \ldots, X_7, X_8 = 1)$$

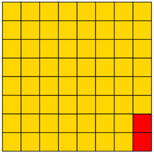
Přímý výpočet marginální pravděpodobnosti

$$
\begin{aligned}
&P(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1) \\
&= \sum_{X_1,X_4,X_5,X_6,X_7} P(X_1, X_2 = 1, X_3, \ldots, X_7, X_8 = 1) \\
&= \sum_{X_1,X_4,X_5,X_6,X_7} \begin{pmatrix} P(X_8 = 1|X_6, X_5) \cdot P(X_7|X_6) \cdot P(X_6|X_3, X_4) \\ \cdot P(X_5|X_2 = 1) \cdot P(X_4|X_2 = 1) \cdot P(X_3|X_1) \\ \cdot P(X_2 = 1) \cdot P(X_1) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Přímý výpočet marginální pravděpodobnosti

$$
\begin{aligned}
& P(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1) \\
&= \sum_{X_1, X_4, X_5, X_6, X_7} P(X_1, X_2 = 1, X_3, \ldots, X_7, X_8 = 1) \\
&= \sum_{X_1, X_4, X_5, X_6, X_7} \left(\begin{array}{l} P(X_8 = 1 | X_6, X_5) \cdot P(X_7 | X_6) \cdot P(X_6 | X_3, X_4) \\ \cdot P(X_5 | X_2 = 1) \cdot P(X_4 | X_2 = 1) \cdot P(X_3 | X_1) \\ \cdot P(X_2 = 1) \cdot P(X_1) \end{array} \right)
\end{aligned}
$$

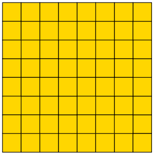
- $\psi(X_1, X_2 = 1, X_3, \ldots, X_7, X_8 = 1)$
  $\rightarrow \psi(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1)$



Přímý výpočet marginální pravděpodobnosti

$$
\begin{aligned}
&P(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1) \\
&= \sum_{X_1, X_4, X_5, X_6, X_7} P(X_1, X_2 = 1, X_3, \ldots, X_7, X_8 = 1) \\
&= \sum_{X_1, X_4, X_5, X_6, X_7} \left(\begin{array}{l} P(X_8 = 1 | X_6, X_5) \cdot P(X_7 | X_6) \cdot P(X_6 | X_3, X_4) \\ \cdot P(X_5 | X_2 = 1) \cdot P(X_4 | X_2 = 1) \cdot P(X_3 | X_1) \\ \cdot P(X_2 = 1) \cdot P(X_1) \end{array} \right)
\end{aligned}
$$

- $\psi(X_1, X_2 = 1, X_3, \ldots, X_7, X_8 = 1)$
  $\rightarrow \psi(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1)$



The largest table has size $2^6 = 64$.

Úsporný výpočet marginální pravděpodobnosti

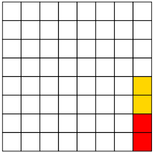
$$
\begin{aligned}
P(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1) \quad &= P(X_2 = 1) \cdot \sum_{X_1} (P(X_3|X_1) \cdot P(X_1)) \\
&\cdot \sum_{X_6} \left(\begin{array}{l} \sum_{X_7} P(X_7|X_6) \\ \cdot \sum_{X_4} (P(X_6|X_3, X_4) \cdot P(X_4|X_2 = 1)) \\ \cdot \sum_{X_5} (P(X_8 = 1|X_6, X_5) \cdot P(X_5|X_2 = 1)) \end{array} \right)
\end{aligned}
$$

Úsporný výpočet marginální pravděpodobnosti

$$P(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1) \quad = P(X_2 = 1) \cdot \sum_{X_1} \left(P(X_3|X_1) \cdot P(X_1) \right)$$

$$\cdot \sum_{X_6} \left(\begin{array}{l} \sum_{X_7} P(X_7|X_6) \\ \cdot \sum_{X_4} \left(P(X_6|X_3, X_4) \cdot P(X_4|X_2 = 1) \right) \\ \cdot \sum_{X_5} \left(P(X_8 = 1|X_6, X_5) \cdot P(X_5|X_2 = 1) \right) \end{array} \right)$$

- $\sum_{X_5} \psi(X_5, X_6) \rightarrow \psi(X_6)$

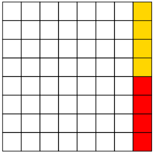


Úsporný výpočet marginální pravděpodobnosti

$$P(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1) \;\; = P(X_2 = 1) \cdot \sum_{X_1} (P(X_3|X_1) \cdot P(X_1))$$

$$\cdot \sum_{X_6} \left(\begin{array}{l} \sum_{X_7} P(X_7|X_6) \\ \cdot \sum_{X_4} (P(X_6|X_3, X_4) \cdot P(X_4|X_2 = 1)) \\ \cdot \sum_{X_5} (P(X_8 = 1|X_6, X_5) \cdot P(X_5|X_2 = 1)) \end{array} \right)$$

- $\sum_{X_5} \psi(X_5, X_6) \rightarrow \psi(X_6)$
- $\sum_{X_4} \psi(X_3, X_4, X_6) \rightarrow \psi(X_3, X_6)$

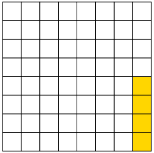


Úsporný výpočet marginální pravděpodobnosti

$$P(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1) \quad = P(X_2 = 1) \cdot \sum_{X_1} \left(P(X_3|X_1) \cdot P(X_1) \right)$$

$$\cdot \sum_{X_6} \left(\begin{array}{l} \color{red}{\sum_{X_7} P(X_7|X_6)} \\ \cdot \sum_{X_4} \left(P(X_6|X_3, X_4) \cdot P(X_4|X_2 = 1) \right) \\ \cdot \sum_{X_5} \left(P(X_8 = 1|X_6, X_5) \cdot P(X_5|X_2 = 1) \right) \end{array} \right)$$

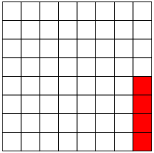
- $\sum_{X_5} \psi(X_5, X_6) \rightarrow \psi(X_6)$
- $\sum_{X_4} \psi(X_3, X_4, X_6) \rightarrow \psi(X_3, X_6)$
- $\sum_{X_7} \psi(X_6, X_7) \rightarrow 1$



Úsporný výpočet marginální pravděpodobnosti

$$
\begin{aligned}
P(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1) &= P(X_2 = 1) \cdot \sum_{X_1} \left(P(X_3|X_1) \cdot P(X_1)\right) \\
&\cdot \sum_{X_6} \left(\begin{array}{l} \sum_{X_7} P(X_7|X_6) \\ \cdot \sum_{X_4} \left(P(X_6|X_3, X_4) \cdot P(X_4|X_2 = 1)\right) \\ \cdot \sum_{X_5} \left(P(X_8 = 1|X_6, X_5) \cdot P(X_5|X_2 = 1)\right) \end{array} \right)
\end{aligned}
$$

- $\sum_{X_5} \psi(X_5, X_6) \to \psi(X_6)$
- $\sum_{X_4} \psi(X_3, X_4, X_6) \to \psi(X_3, X_6)$
- $\sum_{X_7} \psi(X_6, X_7) \to 1$
- $\psi(X_6) \cdot \psi(X_3, X_6) \to \psi'(X_3, X_6)$

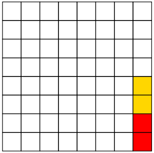


Úsporný výpočet marginální pravděpodobnosti

$$P(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1) \;\; = P(X_2 = 1) \cdot \sum_{X_1} (P(X_3|X_1) \cdot P(X_1))$$

$$\cdot \sum_{X_6} \left(\begin{array}{l} \sum_{X_7} P(X_7|X_6) \\ \cdot \sum_{X_4} (P(X_6|X_3, X_4) \cdot P(X_4|X_2 = 1)) \\ \cdot \sum_{X_5} (P(X_8 = 1|X_6, X_5) \cdot P(X_5|X_2 = 1)) \end{array} \right)$$

- $\sum_{X_5} \psi(X_5, X_6) \rightarrow \psi(X_6)$
- $\sum_{X_4} \psi(X_3, X_4, X_6) \rightarrow \psi(X_3, X_6)$
- $\sum_{X_7} \psi(X_6, X_7) \rightarrow 1$
- $\psi(X_6) \cdot \psi(X_3, X_6) \rightarrow \psi'(X_3, X_6)$
- $\sum_{X_6} \psi'(X_3, X_6) \rightarrow \psi(X_3)$

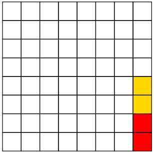


Úsporný výpočet marginální pravděpodobnosti

$$P(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1) = P(X_2 = 1) \cdot \sum_{X_1} \left(P(X_3|X_1) \cdot P(X_1)\right)$$

$$\cdot \sum_{X_6} \left(\begin{array}{l} \sum_{X_7} P(X_7|X_6) \\ \cdot \sum_{X_4} \left(P(X_6|X_3, X_4) \cdot P(X_4|X_2 = 1)\right) \\ \cdot \sum_{X_5} \left(P(X_8 = 1|X_6, X_5) \cdot P(X_5|X_2 = 1)\right) \end{array} \right)$$

- $\sum_{X_5} \psi(X_5, X_6) \to \psi(X_6)$
- $\sum_{X_4} \psi(X_3, X_4, X_6) \to \psi(X_3, X_6)$
- $\sum_{X_7} \psi(X_6, X_7) \to 1$
- $\psi(X_6) \cdot \psi(X_3, X_6) \to \psi'(X_3, X_6)$
- $\sum_{X_6} \psi'(X_3, X_6) \to \psi(X_3)$
- $\sum_{X_1} \psi(X_1, X_3) \to \psi'(X_3)$

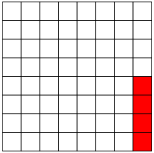


Úsporný výpočet marginální pravděpodobnosti

$$P(X_2=1, X_3, X_8=1) = P(X_2=1)\cdot \sum_{X_1} \left(P(X_3|X_1)\cdot P(X_1)\right)$$

$$\cdot \sum_{X_6} \left(\begin{array}{l} \sum_{X_7} P(X_7|X_6) \\ \cdot \sum_{X_4} \left(P(X_6|X_3,X_4)\cdot P(X_4|X_2=1)\right) \\ \cdot \sum_{X_5} \left(P(X_8=1|X_6,X_5)\cdot P(X_5|X_2=1)\right) \end{array} \right)$$

- $\sum_{X_5} \psi(X_5, X_6) \to \psi(X_6)$
- $\sum_{X_4} \psi(X_3, X_4, X_6) \to \psi(X_3, X_6)$
- $\sum_{X_7} \psi(X_6, X_7) \to 1$
- $\psi(X_6)\cdot\psi(X_3, X_6) \to \psi'(X_3, X_6)$
- $\sum_{X_6} \psi'(X_3, X_6) \to \psi(X_3)$
- $\sum_{X_1} \psi(X_1, X_3) \to \psi'(X_3)$
- $\psi(X_3)\cdot\psi'(X_3)\cdot P(X_2=1) \to P(X_2=1, X_3, X_8=1)$

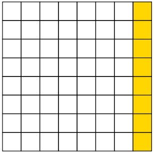


Úsporný výpočet marginální pravděpodobnosti

$$P(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1) \quad = P(X_2 = 1) \cdot \sum_{X_1} (P(X_3|X_1) \cdot P(X_1))$$

$$\cdot \sum_{X_6} \left(\begin{array}{l} \sum_{X_7} P(X_7|X_6) \\ \cdot \sum_{X_4} (P(X_6|X_3, X_4) \cdot P(X_4|X_2 = 1)) \\ \cdot \sum_{X_5} (P(X_8 = 1|X_6, X_5) \cdot P(X_5|X_2 = 1)) \end{array} \right)$$

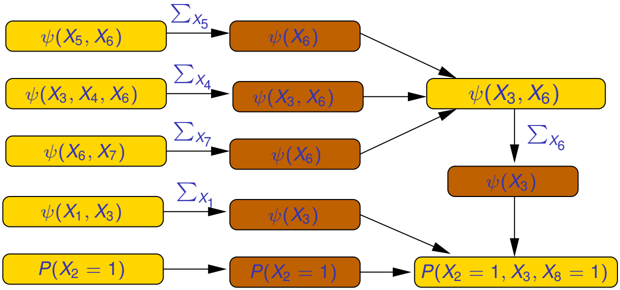
- $\sum_{X_5} \psi(X_5, X_6) \to \psi(X_6)$
- $\sum_{X_4} \psi(X_3, X_4, X_6) \to \psi(X_3, X_6)$
- $\sum_{X_7} \psi(X_6, X_7) \to 1$
- $\psi(X_6) \cdot \psi(X_3, X_6) \to \psi'(X_3, X_6)$
- $\sum_{X_6} \psi'(X_3, X_6) \to \psi(X_3)$
- $\sum_{X_1} \psi(X_1, X_3) \to \psi'(X_3)$
- $\psi(X_3) \cdot \psi'(X_3) \cdot P(X_2 = 1) \to P(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1)$



The largest table has size $2^3 = 8$.

Úsporný výpočet marginální pravděpodobnosti

$$
\begin{aligned}
P(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1) \quad &= P(X_2 = 1) \cdot \sum_{X_1} \left(P(X_3|X_1) \cdot P(X_1) \right) \\
&\cdot \sum_{X_6} \left(\begin{array}{l} \sum_{X_7} P(X_7|X_6) \\ \cdot \sum_{X_4} \left(P(X_6|X_3, X_4) \cdot P(X_4|X_2 = 1) \right) \\ \cdot \sum_{X_5} \left(P(X_8 = 1|X_6, X_5) \cdot P(X_5|X_2 = 1) \right) \end{array} \right)
\end{aligned}
$$



Úsporný výpočet marginální pravděpodobnosti

- Jak uspořádat operace násobení a sčítání, abychom v průběhu výpočtu vytvářeli co nejmenší tabulky?

Úsporný výpočet marginální pravděpodobnosti

- Jak uspořádat operace násobení a sčítání, abychom v průběhu výpočtu vytvářeli co nejmenší tabulky?
- Můžeme nalezené uspořádání použít, když chceme počítat jinou marginální pravděpodobnost?

Úsporný výpočet marginální pravděpodobnosti

- Jak uspořádat operace násobení a sčítání, abychom v průběhu výpočtu vytvářeli co nejmenší tabulky?
- Můžeme nalezené uspořádání použít, když chceme počítat jinou marginální pravděpodobnost?
- A co když chceme spočítat všechny jednorozměrné marginály?

Úsporný výpočet marginální pravděpodobnosti

- Jak uspořádat operace násobení a sčítání, abychom v průběhu výpočtu vytvářeli co nejmenší tabulky?
- Můžeme nalezené uspořádání použít, když chceme počítat jinou marginální pravděpodobnost?
- A co když chceme spočítat všechny jednorozměrné marginály?

Bližší pohled:

Úsporný výpočet marginální pravděpodobnosti

- Jak uspořádat operace násobení a sčítání, abychom v průběhu výpočtu vytvářeli co nejmenší tabulky?
- Můžeme nalezené uspořádání použít, když chceme počítat jinou marginální pravděpodobnost?
- A co když chceme spočítat všechny jednorozměrné marginály?

Bližší pohled:

- Obecně, výpočet marginální pravděpodobnosti je NP-těžký.

Úsporný výpočet marginální pravděpodobnosti

- Jak uspořádat operace násobení a sčítání, abychom v průběhu výpočtu vytvářeli co nejmenší tabulky?
- Můžeme nalezené uspořádání použít, když chceme počítat jinou marginální pravděpodobnost?
- A co když chceme spočítat všechny jednorozměrné marginály?

Bližší pohled:

- Obecně, výpočet marginální pravděpodobnosti je NP-těžký.
- Ale pro bayesovské sítě existují algoritmy, které jsou exponencální pouze vzhledem k velikosti největší kliky triangulovaného moralizovaného doménového grafu bayesovské sítě.

Úsporný výpočet marginální pravděpodobnosti

- Jak uspořádat operace násobení a sčítání, abychom v průběhu výpočtu vytvářeli co nejmenší tabulky?
- Můžeme nalezené uspořádání použít, když chceme počítat jinou marginální pravděpodobnost?
- A co když chceme spočítat všechny jednorozměrné marginály?

Bližší pohled:

- Obecně, výpočet marginální pravděpodobnosti je NP-těžký.
- Ale pro bayesovské sítě existují algoritmy, které jsou exponencální pouze vzhledem k velikosti největší kliky triangulovaného moralizovaného doménového grafu bayesovské sítě.
- Junction Tree Algoritmus

Doménový graf

Připomeňme si, že sdružená pravděpodobnostní distribuce bayesovské sítě je

$$P(X_1, \ldots, X_n) \quad = \quad \prod_{i=1}^{n} P(X_i | \{X_j\}_{j \in Pa(i)})$$

Doménový graf

Připomeňme si, že sdružená pravděpodobnostní distribuce bayesovské sítě je

$$P(X_1, \ldots, X_n) \;=\; \prod_{i=1}^{n} P(X_i | \{X_j\}_{j \in Pa(i)})$$

$D_i = \{X_i\} \cup \{X_j\}_{j \in Pa(i)}$ je doména $P(X_i | \{X_j\}_{j \in Pa(i)})$.

Doménový graf

Připomeňme si, že sdružená pravděpodobnostní distribuce bayesovské sítě je

$$P(X_1, \ldots, X_n) \quad = \quad \prod_{i=1}^{n} P(X_i | \{X_j\}_{j \in Pa(i)})$$

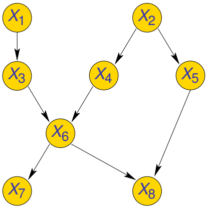
$D_i = \{X_i\} \cup \{X_j\}_{j \in Pa(i)}$ je doména $P(X_i | \{X_j\}_{j \in Pa(i)})$.
Doménový graf je neorientovaný graf s uzly odpovídajícími proměnným $X_1, \ldots, X_n$ a s hranou pro každou dvojici X_a, X_b jestliže existuje $P(X_i | \{X_j\}_{j \in Pa(i)})$ taková, že $X_a, X_b \in D_i$.

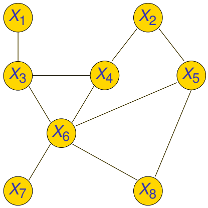
Doménový graf

Připomeňme si, že sdružená pravděpodobnostní distribuce bayesovské sítě je

$$P(X_1, \ldots, X_n) \quad = \quad \prod_{i=1}^{n} P(X_i | \{X_j\}_{j \in Pa(i)})$$

$D_i = \{X_i\} \cup \{X_j\}_{j \in Pa(i)}$ je doména $P(X_i | \{X_j\}_{j \in Pa(i)})$.
Doménový graf je neorientovaný graf s uzly odpovídajícími proměnným $X_1, \ldots, X_n$ a s hranou pro každou dvojici X_a, X_b jestliže existuje $P(X_i | \{X_j\}_{j \in Pa(i)})$ taková, že $X_a, X_b \in D_i$.



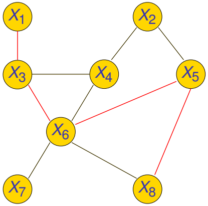


Triangulovaný graf

Cesta je posloupnost $A_1, \ldots, A_\ell$ různých uzlů spojených hranou $\{A_i, A_{i+1}\}$.

Triangulovaný graf

Cesta je posloupnost $A_1, \ldots, A_\ell$ různých uzlů spojených hranou $\{A_i, A_{i+1}\}$.



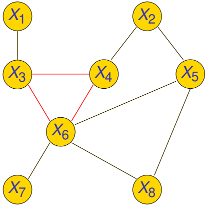
Triangulovaný graf

Cesta je posloupnost $A_1, \ldots, A_\ell$ různých uzlů spojených hranou $\{A_i, A_{i+1}\}$.
Cyklus je posloupnost uzlů $A_1, \ldots, A_{\ell+1} = A_1$, kde $A_1, \ldots, A_\ell$ je cesta a $\{A_\ell, A_{\ell+1}\}$ je hrana; ℓ je délka cyklu.

Triangulovaný graf

Cesta je posloupnost $A_1, \ldots, A_\ell$ různých uzlů spojených hranou $\{A_i, A_{i+1}\}$.

Cyklus je posloupnost uzlů $A_1, \ldots, A_{\ell+1} = A_1$, kde $A_1, \ldots, A_\ell$ je cesta a $\{A_\ell, A_{\ell+1}\}$ je hrana; ℓ je délka cyklu.

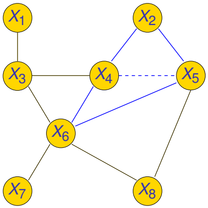


Triangulovaný graf

Cesta je posloupnost $A_1, \ldots, A_\ell$ různých uzlů spojených hranou $\{A_i, A_{i+1}\}$.
Cyklus je posloupnost uzlů $A_1, \ldots, A_{\ell+1} = A_1$, kde $A_1, \ldots, A_\ell$ je cesta a $\{A_\ell, A_{\ell+1}\}$ je hrana; ℓ je délka cyklu.
Příčka v cyklu $A_1, \ldots, A_{\ell+1}$ je hrana mezi dvěma uzly, které v cyklu nesousedí.

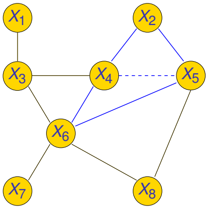
Triangulovaný graf

Cesta je posloupnost $A_1, \ldots, A_\ell$ různých uzlů spojených hranou $\{A_i, A_{i+1}\}$.
Cyklus je posloupnost uzlů $A_1, \ldots, A_{\ell+1} = A_1$, kde $A_1, \ldots, A_\ell$ je cesta a $\{A_\ell, A_{\ell+1}\}$ je hrana; ℓ je délka cyklu.
Příčka v cyklu $A_1, \ldots, A_{\ell+1}$ je hrana mezi dvěma uzly, které v cyklu nesousedí.



Triangulovaný graf

Cesta je posloupnost $A_1, \ldots, A_\ell$ různých uzlů spojených hranou $\{A_i, A_{i+1}\}$.
Cyklus je posloupnost uzlů $A_1, \ldots, A_{\ell+1} = A_1$, kde $A_1, \ldots, A_\ell$ je cesta a $\{A_\ell, A_{\ell+1}\}$ je hrana; ℓ je délka cyklu.
Příčka v cyklu $A_1, \ldots, A_{\ell+1}$ je hrana mezi dvěma uzly, které v cyklu nesousedí.



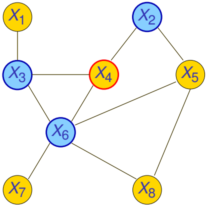
Neorientovaný graf je triangulovaný, jestliže neobsahuje cyklus délky čtyři a více bez příčky.

Grafová terminologie

Uzly spojené hranou s uzlem X se nazývají sousedi uzlu X.

Grafová terminologie

Uzly spojené hranou s uzlem X se nazývají sousedi uzlu X.

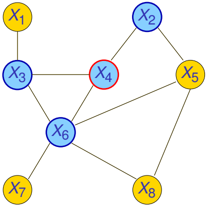


Grafová terminologie

Uzly spojené hranou s uzlem X se nazývají sousedi uzlu X.
Sousedi uzlu X plus X jsou rodina uzlu X.

Grafová terminologie

Uzly spojené hranou s uzlem X se nazývají sousedi uzlu X.
Sousedi uzlu X plus X jsou rodina uzlu X.

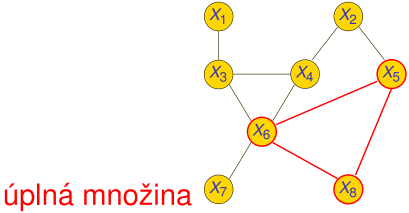


Grafová terminologie

Uzly spojené hranou s uzlem X se nazývají sousedi uzlu X.
Sousedi uzlu X plus X jsou rodina uzlu X.
Množina uzlů je úplná, když všechny uzly této množiny jsou navzájem spojené hranou.

Grafová terminologie

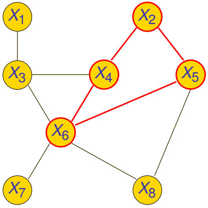
Uzly spojené hranou s uzlem X se nazývají sousedi uzlu X.
Sousedi uzlu X plus X jsou rodina uzlu X.
Množina uzlů je úplná, když všechny uzly této množiny jsou navzájem spojené hranou.



Grafová terminologie

Uzly spojené hranou s uzlem *X* se nazývají sousedi uzlu *X*.
Sousedi uzlu *X* plus *X* jsou rodina uzlu *X*.
Množina uzlů je úplná, když všechny uzly této množiny jsou navzájem spojené hranou.

neúplná množina

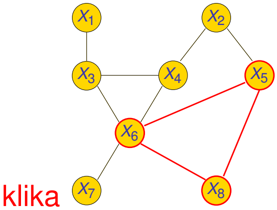


Grafová terminologie

Uzly spojené hranou s uzlem X se nazývají sousedi uzlu X.
Sousedi uzlu X plus X jsou rodina uzlu X.
Množina uzlů je úplná, když všechny uzly této množiny jsou navzájem spojené hranou.
Maximální úplná množina vzhledem k množinové inkluzi se nazývá klika.

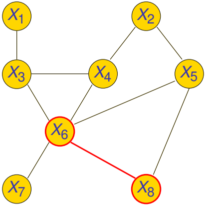
Grafová terminologie

Uzly spojené hranou s uzlem X se nazývají sousedi uzlu X.
Sousedi uzlu X plus X jsou rodina uzlu X.
Množina uzlů je úplná, když všechny uzly této množiny jsou navzájem spojené hranou.
Maximální úplná množina vzhledem k množinové inkluzi se nazývá klika.



Grafová terminologie

Uzly spojené hranou s uzlem X se nazývají sousedi uzlu X.
Sousedi uzlu X plus X jsou rodina uzlu X.
Množina uzlů je úplná, když všechny uzly této množiny jsou navzájem spojené hranou.
Maximální úplná množina vzhledem k množinové inkluzi se nazývá klika.



toto není klika

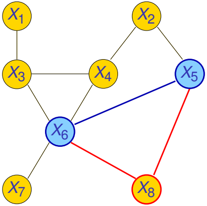
Grafová terminologie

Uzly spojené hranou s uzlem X se nazývají sousedi uzlu X.
Sousedi uzlu X plus X jsou rodina uzlu X.
Množina uzlů je úplná, když všechny uzly této množiny jsou navzájem spojené hranou.
Maximální úplná množina vzhledem k množinové inkluzi se nazývá klika.
Uzel s úplnou množinou sousedů se nazývá simpliciální.

Grafová terminologie

Uzly spojené hranou s uzlem X se nazývají sousedi uzlu X.
Sousedi uzlu X plus X jsou rodina uzlu X.
Množina uzlů je úplná, když všechny uzly této množiny jsou navzájem spojené hranou.
Maximální úplná množina vzhledem k množinové inkluzi se nazývá klika.
Uzel s úplnou množinou sousedů se nazývá simpliciální.

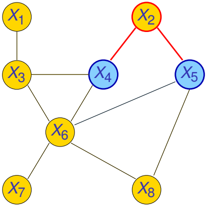
X_8 je simpliciální uzel



Grafová terminologie

Uzly spojené hranou s uzlem X se nazývají sousedi uzlu X.
Sousedi uzlu X plus X jsou rodina uzlu X.
Množina uzlů je úplná, když všechny uzly této množiny jsou navzájem spojené hranou.
Maximální úplná množina vzhledem k množinové inkluzi se nazývá klika.
Uzel s úplnou množinou sousedů se nazývá simpliciální.

X_2 není simpliciální uzel



Eliminační posloupnost

$$P(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1) \quad = P(X_2 = 1) \cdot \sum_{X_1} (P(X_3|X_1) \cdot P(X_1))$$

$$\cdot \sum_{X_6} \left(\begin{array}{l} \sum_{X_7} P(X_7|X_6) \\ \cdot \sum_{X_4} (P(X_6|X_3, X_4) \cdot P(X_4|X_2 = 1)) \\ \cdot \sum_{X_5} (P(X_8 = 1|X_6, X_5) \cdot P(X_5|X_2 = 1)) \end{array} \right)$$

Eliminační posloupnost

$$P(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1) \;\; = P(X_2 = 1) \cdot \sum_{X_1} \left(P(X_3|X_1) \cdot P(X_1) \right)$$

$$\cdot \sum_{X_6} \left(\begin{array}{l} \sum_{X_7} P(X_7|X_6) \\ \cdot \sum_{X_4} \left(P(X_6|X_3, X_4) \cdot P(X_4|X_2 = 1) \right) \\ \cdot \sum_{X_5} \left(P(X_8 = 1|X_6, X_5) \cdot P(X_5|X_2 = 1) \right) \end{array} \right)$$

Eliminační posloupnost použitá výše je například:

$$X_5, X_4, X_7, X_6, X_1$$

Eliminační posloupnost

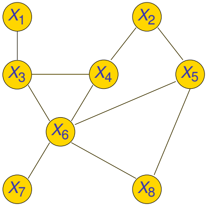
$$P(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1) \quad = P(X_2 = 1) \cdot \sum_{X_1} (P(X_3|X_1) \cdot P(X_1))$$

$$\cdot \sum_{X_6} \left(\begin{array}{l} \sum_{X_7} P(X_7|X_6) \\ \cdot \sum_{X_4} (P(X_6|X_3, X_4) \cdot P(X_4|X_2 = 1)) \\ \cdot \sum_{X_5} (P(X_8 = 1|X_6, X_5) \cdot P(X_5|X_2 = 1)) \end{array} \right)$$

Eliminační posloupnost použitá výše je například:

$$X_5, X_4, X_7, X_6, X_1$$

doménový graf



Eliminační posloupnost

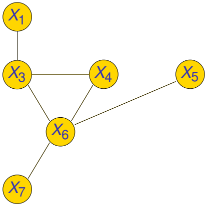
$$P(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1) \quad = P(X_2 = 1) \cdot \sum_{X_1} (P(X_3|X_1) \cdot P(X_1))$$

$$\cdot \sum_{X_6} \left(\begin{array}{l} \sum_{X_7} P(X_7|X_6) \\ \cdot \sum_{X_4} (P(X_6|X_3, X_4) \cdot P(X_4|X_2 = 1)) \\ \cdot \sum_{X_5} (P(X_8 = 1|X_6, X_5) \cdot P(X_5|X_2 = 1)) \end{array} \right)$$

Eliminační posloupnost použitá výše je například:

$$X_5, X_4, X_7, X_6, X_1$$

uzly s evidencí
jsou odstraněny



Eliminační posloupnost

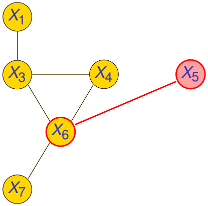
$$P(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1) \quad = P(X_2 = 1) \cdot \sum_{X_1} (P(X_3|X_1) \cdot P(X_1))$$

$$\cdot \sum_{X_6} \left(\begin{array}{l} \sum_{X_7} P(X_7|X_6) \\ \cdot \sum_{X_4} (P(X_6|X_3, X_4) \cdot P(X_4|X_2 = 1)) \\ \cdot \sum_{X_5} (P(X_8 = 1|X_6, X_5) \cdot P(X_5|X_2 = 1)) \end{array} \right)$$

Eliminační posloupnost použitá výše je například:

$$X_5, X_4, X_7, X_6, X_1$$

eliminujeme X_5



Eliminační posloupnost

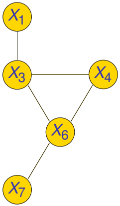
$$P(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1) \quad = P(X_2 = 1) \cdot \sum_{X_1} (P(X_3|X_1) \cdot P(X_1))$$

$$\cdot \sum_{X_6} \left(\begin{array}{l} \sum_{X_7} P(X_7|X_6) \\ \cdot \sum_{X_4} (P(X_6|X_3, X_4) \cdot P(X_4|X_2 = 1)) \\ \cdot \sum_{X_5} (P(X_8 = 1|X_6, X_5) \cdot P(X_5|X_2 = 1)) \end{array} \right)$$

Eliminační posloupnost použitá výše je například:

$$X_5, X_4, X_7, X_6, X_1$$

X_5 eliminováno



Eliminační posloupnost

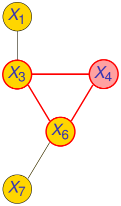
$$P(X_2=1,X_3,X_8=1) \;=P(X_2=1)\cdot\sum_{X_1}\left(P(X_3|X_1)\cdot P(X_1)\right)$$

$$\cdot\sum_{X_6}\left(\begin{array}{l}\sum_{X_7}P(X_7|X_6)\\ \cdot\sum_{X_4}\left(P(X_6|X_3,X_4)\cdot P(X_4|X_2=1)\right)\\ \cdot\sum_{X_5}\left(P(X_8=1|X_6,X_5)\cdot P(X_5|X_2=1)\right)\end{array}\right)$$

Eliminační posloupnost použitá výše je například:

$$X_5, X_4, X_7, X_6, X_1$$

eliminujeme X_4



Eliminační posloupnost

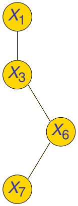
$$P(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1) \;\; = P(X_2 = 1) \cdot \sum_{X_1} (P(X_3|X_1) \cdot P(X_1))$$

$$\cdot \sum_{X_6} \left(\begin{array}{l} \sum_{X_7} P(X_7|X_6) \\ \cdot \color{red}{\sum_{X_4} (P(X_6|X_3, X_4) \cdot P(X_4|X_2 = 1))} \\ \cdot \sum_{X_5} (P(X_8 = 1|X_6, X_5) \cdot P(X_5|X_2 = 1)) \end{array} \right)$$

Eliminační posloupnost použitá výše je například:

$$X_5, X_4, X_7, X_6, X_1$$

X_4 eliminováno



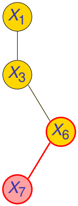
$$P(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1) \;\; = P(X_2 = 1) \cdot \sum_{X_1} (P(X_3|X_1) \cdot P(X_1))$$

$$\cdot \sum_{X_6} \left(\begin{array}{l} \sum_{X_7} P(X_7|X_6) \\ \cdot \sum_{X_4} (P(X_6|X_3, X_4) \cdot P(X_4|X_2 = 1)) \\ \cdot \sum_{X_5} (P(X_8 = 1|X_6, X_5) \cdot P(X_5|X_2 = 1)) \end{array} \right)$$

Eliminační posloupnost použitá výše je například:

$$X_5, X_4, X_7, X_6, X_1$$

eliminujeme X_7



Eliminační posloupnost

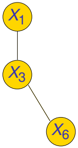
$$P(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1) \;\; = P(X_2 = 1) \cdot \sum_{X_1} (P(X_3|X_1) \cdot P(X_1))$$

$$\cdot \sum_{X_6} \left(\begin{array}{l} \sum_{X_7} P(X_7|X_6) \\ \cdot \sum_{X_4} (P(X_6|X_3, X_4) \cdot P(X_4|X_2 = 1)) \\ \cdot \sum_{X_5} (P(X_8 = 1|X_6, X_5) \cdot P(X_5|X_2 = 1)) \end{array} \right)$$

Eliminační posloupnost použitá výše je například:

$$X_5, X_4, X_7, X_6, X_1$$

X_7 eliminováno



Eliminační posloupnost

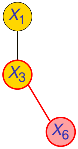
$$P(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1) \quad = P(X_2 = 1) \cdot \sum_{X_1} (P(X_3|X_1) \cdot P(X_1))$$

$$\cdot \sum_{X_6} \left(\begin{array}{l} \sum_{X_7} P(X_7|X_6) \\ \cdot \sum_{X_4} (P(X_6|X_3, X_4) \cdot P(X_4|X_2 = 1)) \\ \cdot \sum_{X_5} (P(X_8 = 1|X_6, X_5) \cdot P(X_5|X_2 = 1)) \end{array} \right)$$

Eliminační posloupnost použitá výše je například:

$$X_5, X_4, X_7, X_6, X_1$$

eliminujeme X_6



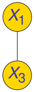
Eliminační posloupnost

$$P(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1) \quad = P(X_2 = 1) \cdot \sum_{X_1} \left(P(X_3 | X_1) \cdot P(X_1)\right)$$

$$\cdot \sum_{X_6} \left(\begin{array}{l} \sum_{X_7} P(X_7 | X_6) \\ \cdot \sum_{X_4} \left(P(X_6 | X_3, X_4) \cdot P(X_4 | X_2 = 1)\right) \\ \cdot \sum_{X_5} \left(P(X_8 = 1 | X_6, X_5) \cdot P(X_5 | X_2 = 1)\right) \end{array} \right)$$

Eliminační posloupnost použitá výše je například:

$$X_5, X_4, X_7, X_6, X_1$$



X_6 eliminováno

Eliminační posloupnost

$$P(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1) \;\; = P(X_2 = 1) \cdot \sum_{X_1} (P(X_3|X_1) \cdot P(X_1))$$

$$\cdot \sum_{X_6} \left(\begin{array}{l} \sum_{X_7} P(X_7|X_6) \\ \cdot \sum_{X_4} (P(X_6|X_3, X_4) \cdot P(X_4|X_2 = 1)) \\ \cdot \sum_{X_5} (P(X_8 = 1|X_6, X_5) \cdot P(X_5|X_2 = 1)) \end{array} \right)$$

Eliminační posloupnost použitá výše je například:

$$X_5, X_4, X_7, X_6, X_1$$

eliminujeme X_1

Eliminační posloupnost

$$P(X_2 = 1, X_3, X_8 = 1) \quad = P(X_2 = 1) \cdot \sum_{X_1} \left(P(X_3|X_1) \cdot P(X_1) \right)$$

$$\cdot \sum_{X_6} \left(\begin{array}{l} \sum_{X_7} P(X_7|X_6) \\ \cdot \sum_{X_4} \left(P(X_6|X_3, X_4) \cdot P(X_4|X_2 = 1) \right) \\ \cdot \sum_{X_5} \left(P(X_8 = 1|X_6, X_5) \cdot P(X_5|X_2 = 1) \right) \end{array} \right)$$

Eliminační posloupnost použitá výše je například:

$$X_5, X_4, X_7, X_6, X_1$$

X_1 eliminováno

Perfektní eliminační posloupnost

- Než můžeme eliminovat X musíme nejprve vynásobit všechny pravděpodobnostní tabulky obsahující X.

Perfektní eliminační posloupnost

- Než můžeme eliminovat X musíme nejprve vynásobit všechny pravděpodobnostní tabulky obsahující X.
- Doménou tohoto součinu je rodina X.

Perfektní eliminační posloupnost

- Než můžeme eliminovat X musíme nejprve vynásobit všechny pravděpodobnostní tabulky obsahující X.
- Doménou tohoto součinu je rodina X.
- Když eliminujeme X spojíme navzájem hranou všechny sousedy X.

Perfektní eliminační posloupnost

- Než můžeme eliminovat X musíme nejprve vynásobit všechny pravděpodobnostní tabulky obsahující X.
- Doménou tohoto součinu je rodina X.
- Když eliminujeme X spojíme navzájem hranou všechny sousedy X.
- Čím více je přidaných hran tím větší tabulky vytváříme v průběhu výpočtu.

Perfektní eliminační posloupnost

- Než můžeme eliminovat X musíme nejprve vynásobit všechny pravděpodobnostní tabulky obsahující X.
- Doménou tohoto součinu je rodina X.
- Když eliminujeme X spojíme navzájem hranou všechny sousedy X.
- Čím více je přidaných hran tím větší tabulky vytváříme v průběhu výpočtu.
- Eliminační posloupnost je lepší, když přidáme méně hran.

Perfektní eliminační posloupnost

- Než můžeme eliminovat X musíme nejprve vynásobit všechny pravděpodobnostní tabulky obsahující X.
- Doménou tohoto součinu je rodina X.
- Když eliminujeme X spojíme navzájem hranou všechny sousedy X.
- Čím více je přidaných hran tím větší tabulky vytváříme v průběhu výpočtu.
- Eliminační posloupnost je lepší, když přidáme méně hran.
- Perfektní eliminační posloupnost je eliminační posloupnost, která nevyžaduje přidání žádné hrany.

Perfektní eliminační posloupnost

- Než můžeme eliminovat X musíme nejprve vynásobit všechny pravděpodobnostní tabulky obsahující X.
- Doménou tohoto součinu je rodina X.
- Když eliminujeme X spojíme navzájem hranou všechny sousedy X.
- Čím více je přidaných hran tím větší tabulky vytváříme v průběhu výpočtu.
- Eliminační posloupnost je lepší, když přidáme méně hran.
- Perfektní eliminační posloupnost je eliminační posloupnost, která nevyžaduje přidání žádné hrany.
- Eliminační posloupnost v předchozím příkladu je perfektní.

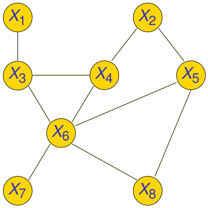
Neperfektní eliminační posloupnost

Spočítejme $P(X_3)$, t.j., marginální pravděpodobnost X_3 (bez vložené evidence).

Neperfektní eliminační posloupnost

Spočítejme $P(X_3)$, t.j., marginální pravděpodobnost X_3 (bez vložené evidence).

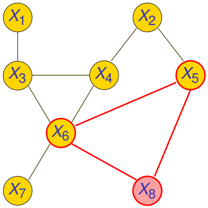
doménový graf



Neperfektní eliminační posloupnost

Spočítejme $P(X_3)$, t.j., marginální pravděpodobnost X_3 (bez vložené evidence).

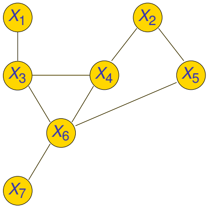
eliminujeme X_8



Neperfektní eliminační posloupnost

Spočítejme $P(X_3)$, t.j., marginální pravděpodobnost X_3 (bez vložené evidence).

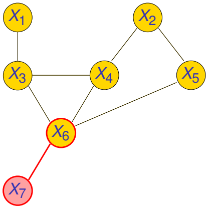
X_8 eliminováno



Neperfektní eliminační posloupnost

Spočítejme $P(X_3)$, t.j., marginální pravděpodobnost X_3 (bez vložené evidence).

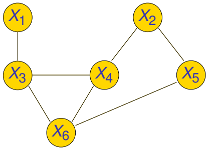
eliminujeme X_7



Neperfektní eliminační posloupnost

Spočítejme $P(X_3)$, t.j., marginální pravděpodobnost X_3 (bez vložené evidence).

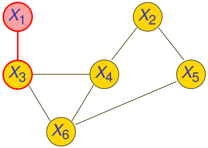
X_7 eliminováno



Neperfektní eliminační posloupnost

Spočítejme $P(X_3)$, t.j., marginální pravděpodobnost X_3 (bez vložené evidence).

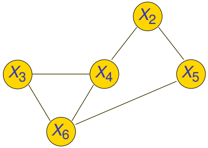
eliminujeme X_1



Neperfektní eliminační posloupnost

Spočítejme $P(X_3)$, t.j., marginální pravděpodobnost X_3 (bez vložené evidence).

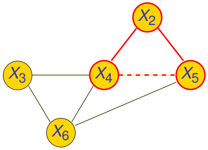
X_1 je eliminováno.
Mezi uzly, které máme eliminovat již neexistuje simpliciální uzel.



Neperfektní eliminační posloupnost

Spočítejme $P(X_3)$, t.j., marginální pravděpodobnost X_3 (bez vložené evidence).

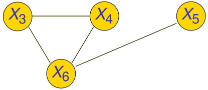
eliminujeme X_2
přidáváme hranu $\{X_4, X_5\}$



Neperfektní eliminační posloupnost

Spočítejme $P(X_3)$, t.j., marginální pravděpodobnost X_3 (bez vložené evidence).

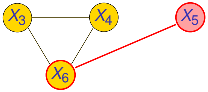
X_2 eliminováno



Neperfektní eliminační posloupnost

Spočítejme $P(X_3)$, t.j., marginální pravděpodobnost X_3 (bez vložené evidence).

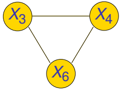
eliminujeme X_5



Neperfektní eliminační posloupnost

Spočítejme $P(X_3)$, t.j., marginální pravděpodobnost X_3 (bez vložené evidence).

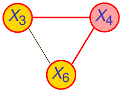
X_5 eliminováno



Neperfektní eliminační posloupnost

Spočítejme $P(X_3)$, t.j., marginální pravděpodobnost X_3 (bez vložené evidence).

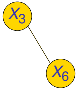
eliminujeme X_4



Neperfektní eliminační posloupnost

Spočítejme $P(X_3)$, t.j., marginální pravděpodobnost X_3 (bez vložené evidence).

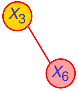
X_4 eliminováno



Neperfektní eliminační posloupnost

Spočítejme $P(X_3)$, t.j., marginální pravděpodobnost X_3 (bez vložené evidence).

eliminujeme X_6



Neperfektní eliminační posloupnost

Spočítejme $P(X_3)$, t.j., marginální pravděpodobnost X_3 (bez vložené evidence).

X_6 eliminováno

Neperfektní eliminační posloupnost

Spočítejme $P(X_3)$, t.j., marginální pravděpodobnost X_3 (bez vložené evidence).

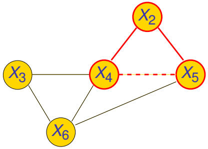
Povšimněte si, že přidaná hrana je přesně ta, kteru jsme přidali do doménového grafu, aby se stal triangulovaným.

Neperfektní eliminační posloupnost

Spočítejme $P(X_3)$, t.j., marginální pravděpodobnost X_3 (bez vložené evidence).

Povšimněte si, že přidaná hrana je přesně ta, kteru jsme přidali do doménového grafu, aby se stal triangulovaným.

eliminujeme X_2
přidáváme hranu $\{X_4, X_5\}$

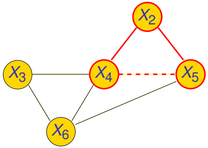


Neperfektní eliminační posloupnost

Spočítejme $P(X_3)$, t.j., marginální pravděpodobnost X_3 (bez vložené evidence).

Povšimněte si, že přidaná hrana je přesně ta, kteru jsme přidali do doménového grafu, aby se stal triangulovaným.

eliminujeme X_2
přidáváme hranu $\{X_4, X_5\}$



V triangulovaném grafu je **vždy možné** najít perfektní eliminační posloupnost!

Join tree

Join tree neorientovaného grafu G je neorientovaný graf T takový, že:

- uzly T odpovídají klikám grafu G

Join tree

Join tree neorientovaného grafu G je neorientovaný graf T takový, že:

- uzly T odpovídají klikám grafu G
- uzly T jsou spojeny hranou, tak že graf je strom (t.j. souvislý graf bez cyklů)

Join tree

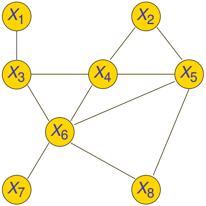
Join tree neorientovaného grafu G je neorientovaný graf T takový, že:

- uzly T odpovídají klikám grafu G
- uzly T jsou spojeny hranou, tak že graf je strom (t.j. souvislý graf bez cyklů)
- pro všechny dvojice uzlů i a j stromu T platí, že pro pro všechny kliky C_k odpovídající uzlu k na cestě z i do j platí, že $C_k \supseteq C_i \cap C_j$.

Join tree

Join tree neorientovaného grafu G je neorientovaný graf T takový, že:

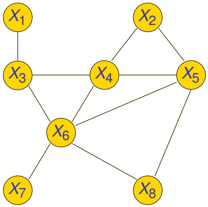
- uzly T odpovídají klikám grafu G
- uzly T jsou spojeny hranou, tak že graf je strom (t.j. souvislý graf bez cyklů)
- pro všechny dvojice uzlů i a j stromu T platí, že pro pro všechny kliky C_k odpovídající uzlu k na cestě z i do j platí, že $C_k \supseteq C_i \cap C_j$.

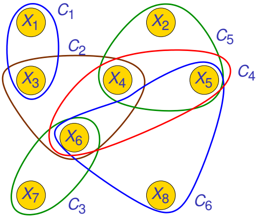


Join tree

Join tree neorientovaného grafu G je neorientovaný graf T takový, že:

- uzly T odpovídají klikám grafu G
- uzly T jsou spojeny hranou, tak že graf je strom (t.j. souvislý graf bez cyklů)
- pro všechny dvojice uzlů i a j stromu T platí, že pro pro všechny kliky C_k odpovídající uzlu k na cestě z i do j platí, že $C_k \supseteq C_i \cap C_j$.

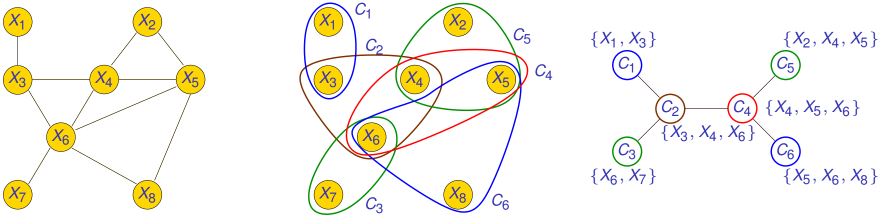




Join tree

Join tree neorientovaného grafu G je neorientovaný graf T takový, že:

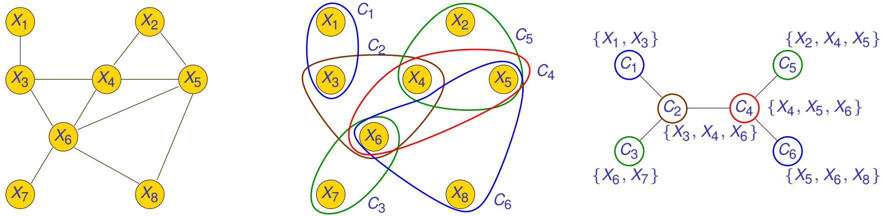
- uzly T odpovídají klikám grafu G
- uzly T jsou spojeny hranou, tak že graf je strom (t.j. souvislý graf bez cyklů)
- pro všechny dvojice uzlů i a j stromu T platí, že pro pro všechny kliky C_k odpovídající uzlu k na cestě z i do j platí, že $C_k \supseteq C_i \cap C_j$.



Join tree

Join tree neorientovaného grafu G je neorientovaný graf T takový, že:

- uzly T odpovídají klikám grafu G
- uzly T jsou spojeny hranou, tak že graf je strom (t.j. souvislý graf bez cyklů)
- pro všechny dvojice uzlů i a j stromu T platí, že pro pro všechny kliky C_k odpovídající uzlu k na cestě z i do j platí, že $C_k \supseteq C_i \cap C_j$.



Pro triangulovaný graf můžeme **vždy** zkonstruovat join tree.

Junction tree (strom spojení)

Junction tree je join tree T rozšířený o:

- pravděpodobnostní tabulky přiřazené k uzlu, jehož klika obsahuje doménu této tabulky

Junction tree (strom spojení)

Junction tree je join tree T rozšířený o:

- pravděpodobnostní tabulky přiřazené k uzlu, jehož klika obsahuje doménu této tabulky
- ke každé hraně $\{C_i, C_j\}$ stromu T je přiřazena tzv. separační množina $C_i \cap C_j$

Junction tree (strom spojení)

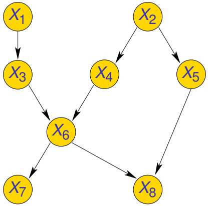
Junction tree je join tree T rozšířený o:

- pravděpodobnostní tabulky přiřazené k uzlu, jehož klika obsahuje doménu této tabulky
- ke každé hraně $\{C_i, C_j\}$ stromu T je přiřazena tzv. separační množina $C_i \cap C_j$
- každý separátor obsahuje dva mailboxy pro zasílané pravděpodobnostní tabulky - pro každý směr jeden mailbox.

Junction tree (strom spojení)

Junction tree je join tree T rozšířený o:

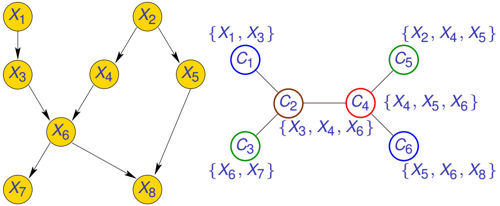
- pravděpodobnostní tabulky přiřazené k uzlu, jehož klika obsahuje doménu této tabulky
- ke každé hraně $\{C_i, C_j\}$ stromu T je přiřazena tzv. separační množina $C_i \cap C_j$
- každý separátor obsahuje dva mailboxy pro zasílané pravděpodobnostní tabulky - pro každý směr jeden mailbox.



Junction tree (strom spojení)

Junction tree je join tree T rozšířený o:

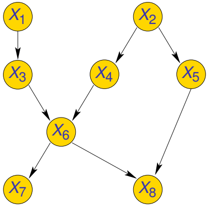
- pravděpodobnostní tabulky přiřazené k uzlu, jehož klika obsahuje doménu této tabulky
- ke každé hraně $\{C_i, C_j\}$ stromu T je přiřazena tzv. separační množina $C_i \cap C_j$
- každý separátor obsahuje dva mailboxy pro zasílané pravděpodobnostní tabulky - pro každý směr jeden mailbox.

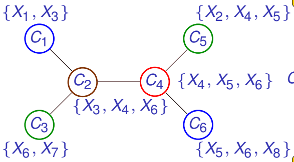


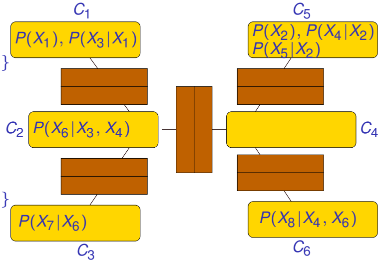
Junction tree (strom spojení)

Junction tree je join tree T rozšířený o:

- pravděpodobnostní tabulky přiřazené k uzlu, jehož klika obsahuje doménu této tabulky
- ke každé hraně $\{C_i, C_j\}$ stromu T je přiřazena tzv. separační množina $C_i \cap C_j$
- každý separátor obsahuje dva mailboxy pro zasílané pravděpodobnostní tabulky - pro každý směr jeden mailbox.





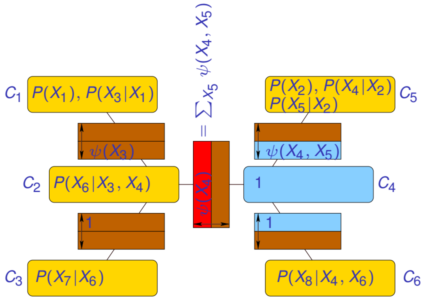


Výpočet pomocí junction tree - zasílání zpráv

Každý uzel může zaslat zprávu jen tehdy, když obdržel zprávy od všech svých sousedů s výjimkou toho, kterému bude zasílat zprávu.

Výpočet pomocí junction tree - zasílání zpráv

Každý uzel může zaslat zprávu jen tehdy, když obdržel zprávy od všech svých sousedů s výjimkou toho, kterému bude zasílat zprávu.



Výpočet pomocí junction tree - zasílání zpráv

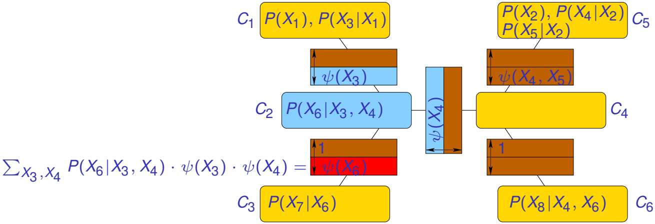
Zpráva zasílaná z C_i do C_j vznikne:

- součinem všech tabulek přiřazených uzlu C_i a všech tabulek ve zprávách obdržených od svých sousedů s výjimkou zprávy od C_j
- marginalizací výsledného součinu na proměnné separátoru $C_i \cap C_j$.

Výpočet pomocí junction tree - zasílání zpráv

Zpráva zasílaná z C_i do C_j vznikne:

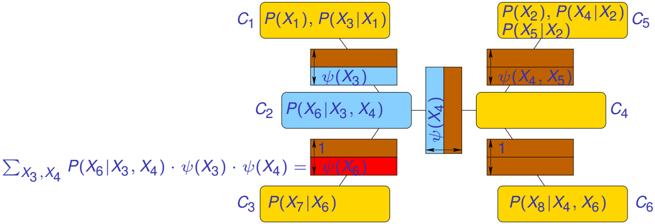
- součinem všech tabulek přiřazených uzlu C_i a všech tabulek ve zprávách obdržených od svých sousedů s výjimkou zprávy od C_j
- marginalizací výsledného součinu na proměnné separátoru $C_i \cap C_j$.



Výpočet pomocí junction tree - zasílání zpráv

Zpráva zasílaná z C_i do C_j vznikne:

- součinem všech tabulek přiřazených uzlu C_i a všech tabulek ve zprávách obdržených od svých sousedů s výjimkou zprávy od C_j
- marginalizací výsledného součinu na proměnné separátoru $C_i \cap C_j$.



Výpočet končí zaplněním všech mailboxů.

Výpočet pomocí junction tree

- Najdeme kliku obsahující všechny proměnné této pravděpodobnosti (t.j. její doménu).

Výpočet pomocí junction tree

- Najdeme kliku obsahující všechny proměnné této pravděpodobnosti (t.j. její doménu).
- Vynásobíme všechny pravděpodobnosní tabulky přiřazené této klice a tabulky ve všech příchozích zprávách.

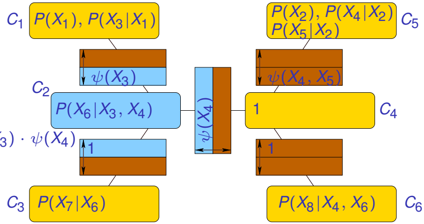
Výpočet pomocí junction tree

- Najdeme kliku obsahující všechny proměnné této pravděpodobnosti (t.j. její doménu).
- Vynásobíme všechny pravděpodobnosní tabulky přiřazené této klice a tabulky ve všech příchozích zprávách.
- Marginalizujeme výsledný součin na doménu marginální pravděpodobnosti, která nás zajímá.

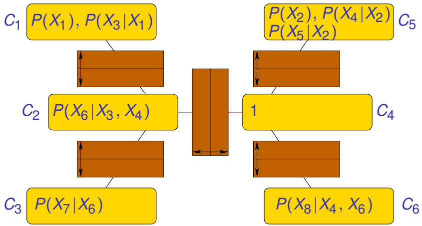
Výpočet pomocí junction tree

- Najdeme kliku obsahující všechny proměnné této pravděpodobnosti (t.j. její doménu).
- Vynásobíme všechny pravděpodobnosní tabulky přiřazené této klice a tabulky ve všech příchozích zprávách.
- Marginalizujeme výsledný součin na doménu marginální pravděpodobnosti, která nás zajímá.

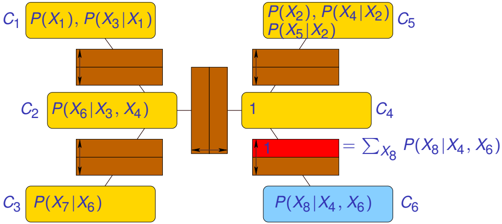
$$P(X_3) = \sum_{X_4, X_6} P(X_6|X_3, X_4) \cdot \psi(X_3) \cdot \psi(X_4)$$



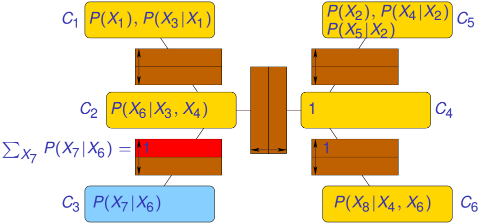
Příklad výpočtu $P(X_3)$ v junction tree



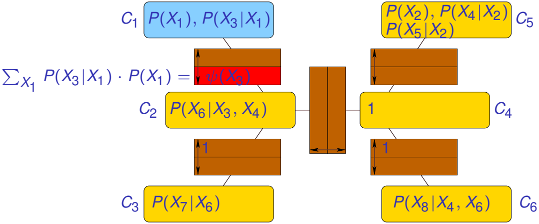
Příklad výpočtu $P(X_3)$ v junction tree



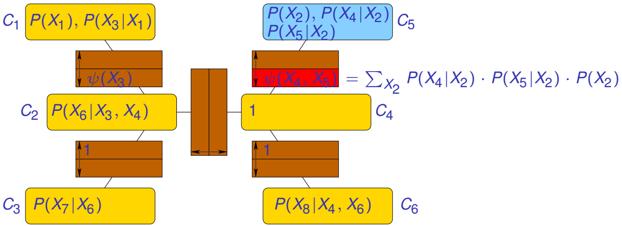
Příklad výpočtu $P(X_3)$ v junction tree



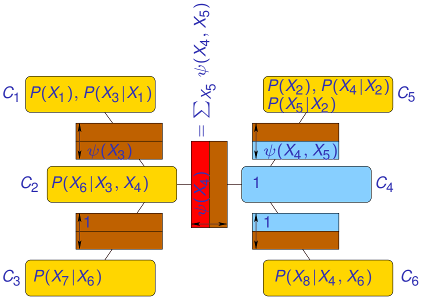
Příklad výpočtu $P(X_3)$ v junction tree



Příklad výpočtu $P(X_3)$ v junction tree

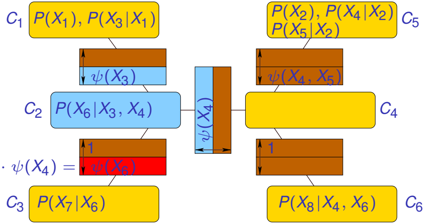


Příklad výpočtu $P(X_3)$ v junction tree



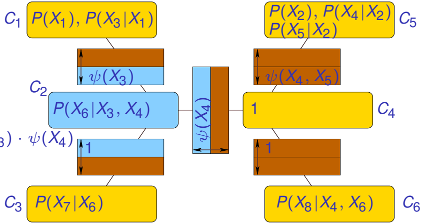
Příklad výpočtu $P(X_3)$ v junction tree

$\sum_{X_3,X_4} P(X_6|X_3,X_4) \cdot \psi(X_3) \cdot \psi(X_4) =$

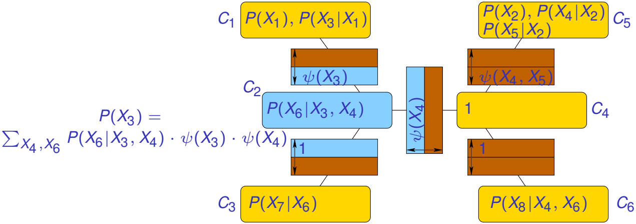


Příklad výpočtu $P(X_3)$ v junction tree

$$P(X_3) = \sum_{X_4, X_6} P(X_6 | X_3, X_4) \cdot \psi(X_3) \cdot \psi(X_4)$$



Příklad výpočtu $P(X_3)$ v junction tree



... a tak dále až do zaplnění všech mailboxů.

Jiné metody výpočtu v bayesovských sítích

- Přesné metody: Lauritzen-Spiegelhalter method, Shenoy-Shafer method, Lazy propagation (A. Madsen and F. V. Jensen), Variable elimination - e.g., Bucket elimination (R. Dechter et al.).

Jiné metody výpočtu v bayesovských sítích

- Přesné metody: Lauritzen-Spiegelhalter method, Shenoy-Shafer method, Lazy propagation (A. Madsen and F. V. Jensen), Variable elimination - e.g., Bucket elimination (R. Dechter et al.).
- Přibližné metody: Markov Chain Monte Carlo (MCMC) methods - e.g., Gibbs sampling, Penniless propagation (A. Cano, S. Moral, and A. Salmerón), Loopy belief propagation (J. Pearl), Variational methods (T. Jaakkola and M. Jordan).

Jiné metody výpočtu v bayesovských sítích

- Přesné metody: Lauritzen-Spiegelhalter method, Shenoy-Shafer method, Lazy propagation (A. Madsen and F. V. Jensen), Variable elimination - e.g., Bucket elimination (R. Dechter et al.).
- Přibližné metody: Markov Chain Monte Carlo (MCMC) methods - e.g., Gibbs sampling, Penniless propagation (A. Cano, S. Moral, and A. Salmerón), Loopy belief propagation (J. Pearl), Variational methods (T. Jaakkola and M. Jordan).
- Přesné metody využívající lokální strukturu podmíněných pravděpodobnostních tabulek: Arithmetic circuits (A. Darwiche et al.).

Další úlohy řešené pomocí bayesovských sítí

- Nejpravděpodobnější konfigurace proměnných - maximum aposteriori configuration (MAP)

Další úlohy řešené pomocí bayesovských sítí

- Nejpravděpodobnější konfigurace proměnných - maximum aposteriori configuration (MAP)
- Analýza citlivosti na změnu parametrů modelu

Další úlohy řešené pomocí bayesovských sítí

- Nejpravděpodobnější konfigurace proměnných - maximum aposteriori configuration (MAP)
- Analýza citlivosti na změnu parametrů modelu
- Rozhodování s cílem maximalizovat očekávaný užitek (v tzv. decision diagrams)

Reference

Textbook:

- Finn V. Jensen, Bayesian networks and Decision Graphs. Springer-Verlag, 2001.

Reference

Textbook:

- Finn V. Jensen, Bayesian networks and Decision Graphs. Springer-Verlag, 2001.
- Finn V. Jensen and Thomas D. Nielsen, Bayesian networks and Decision Graphs. Springer-Verlag, Second edition, 2007. (see `http://bndg.cs.aau.dk`)

Reference

Textbook:

- Finn V. Jensen, Bayesian networks and Decision Graphs. Springer-Verlag, 2001.
- Finn V. Jensen and Thomas D. Nielsen, Bayesian networks and Decision Graphs. Springer-Verlag, Second edition, 2007. (see http://bndg.cs.aau.dk)

Software:

Reference

Textbook:

- Finn V. Jensen, Bayesian networks and Decision Graphs. Springer-Verlag, 2001.
- Finn V. Jensen and Thomas D. Nielsen, Bayesian networks and Decision Graphs. Springer-Verlag, Second edition, 2007. (see http://bndg.cs.aau.dk)

Software:

- Hugin. Comercial, free demo version (size limited), http://www.hugin.com

Reference

Textbook:

- Finn V. Jensen, Bayesian networks and Decision Graphs. Springer-Verlag, 2001.
- Finn V. Jensen and Thomas D. Nielsen, Bayesian networks and Decision Graphs. Springer-Verlag, Second edition, 2007. (see http://bndg.cs.aau.dk)

Software:

- Hugin. Comercial, free demo version (size limited), http://www.hugin.com
- Genie. Freely available, http://genie.sis.pitt.edu/