Úvod do bayesovských sítí

Jiří Vomlel

Laboratoř inteligentních systémů
Vysoká škola ekonomická Praha

Tato prezentace je k dispozici na:
http://www.utia.cas.cz/vomlel/

Obor hodnot

Nechť $\mathcal{X}$ je kartézský součin konečných množin hodnot nějakých náhodných veličin.

Například mějme dvě dvouhodnotové veličiny $Gender$ a $Hair$.

Hodnoty veličiny $Gender$ jsou $male$ a $female$.

Hodnoty veličiny $Hair$ jsou $long$ a $short$.

Množina $\mathcal{X} = \{male, female\} \times \{long, short\}$ obsahuje čtyři prvky

$(male, long)$	$(male, short)$
$(female, long)$	$(female, short)$

zkráceně

(m, l)	(m, s)
(f, l)	(f, s)

Potenční množina

Potenční množina $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ množiny $\mathcal{X}$ je množina všech podmnožin množiny $\mathcal{X}$. V našem příkladě

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X} &= \{(m,l),(m,s),(f,l),(f,s)\} \\
\mathcal{P}(\mathcal{X}) &= \left\{
\begin{array}{l}
\{\ \}, \\[1em]
\{(m,l)\},\ \{(m,s)\},\ \{(f,l)\},\ \{(f,s)\}, \\[1em]
\{(m,l),(m,s)\},\ \{(m,l),(f,l)\},\ \{(m,l),(f,s)\}, \\
\{(m,s),(f,l)\},\ \{(m,s),(f,s)\},\ \{(f,l),(f,s)\} \\[1em]
\{(m,l),(m,s),(f,l)\},\ \{(m,l),(m,s),(f,s)\}, \\
\{(m,l),(f,l),(f,s)\},\ \{(m,s),(f,l),(f,s)\}, \\[1em]
\{(m,l),(m,s),(f,l),(f,s)\}
\end{array}
\right\}
\end{aligned}
$$

Pravděpodobnostní distribuce

Pravděpodobnostní distribuce P na $\mathcal{X}$ je zobrazení z potenční množiny $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ do uzavřeného intervalu $\langle 0, 1\rangle$ splňující:

- $P(\mathcal{X}) = 1$ a
- $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}, \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = 0 \ \Rightarrow \ P(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{B})$.

V našem příkladě

- $P(\{(m,l),(f,l),(m,s)(f,s)\}) = 1$
- $P(\{(m,l),(m,s)\}) = P(\{(m,l)\}) + P(\{(m,s)\})$
- atd.

(m,l)	(m,s)
(f,l)	(f,s)

Specifikace pravděpodobnostní distribuce

Prvky potenční množiny $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ se nazývají jevy.

Prvky množiny $\mathcal{X}$ se nazývají elementární jevy.

V příkladě jsme měli čtyři elementární jevy: (m,l),(m,s),(f,l) a (f,s).

Pro úplnou specifikaci pravděpodobnostní distribuce P stačí definovat pravděpodobnosti elementárních jevů. Díky aditivitě máme definovanou pravděpodobnost všech jevů.

V našem příkladě stačí definovat

- $P(\{m,l\})$,$P(\{m,s\})$,$P(\{f,l\})$ a $P(\{f,s\})$ tak, aby platilo:
- $P(\{m,l\}) + P(\{m,s\}) + P(\{f,l\}) + P(\{f,s\}) = 1$.

Místo $P(\{a,b\})$ budeme používat zkrácený zápis $P(a,b)$. V případě, kdy budeme potřebovat zdůraznit proměnné budeme používat zápis $P(A = a, B = b)$.

Specifikace pravděpodobnostní distribuce

Pro úplnou specifikaci pravděpodobnostní distribuce P stačí definovat:

$$P(male, long) = 0.1$$
$$P(male, short) = 0.4$$
$$P(female, long) = 0.3$$
$$P(female, short) = 0.2$$

	long	*short*
male	$P(m,l) = 0.1$	$P(m,s) = 0.4$
female	$P(f,l) = 0.3$	$P(f,s) = 0.2$

Evidentně platí, že

$$P(male, long) + P(male, short) + P(female, long) + P(female, short) = 1$$

Marginalizace

Marginální distribuce veličiny B je pravděpodobnostní distribuce na B taková, že pro každou hodnotu b veličiny B platí, že

$$P(b) \quad = \quad P(\{(a,b') : b' = b\}) \quad = \quad \sum_a P(a,b) \quad .$$

Zkráceně pro celou distribuci na B budeme psát

$$P(B) \quad = \quad \sum_A P(A,B) \quad .$$

$$\begin{aligned}
P(m) &= P(m,l) + P(m,s) = 0.1 + 0.4 \\
P(f) &= P(f,l) + P(f,s) = 0.3 + 0.2 \\
P(l) &= P(m,l) + P(f,l) = 0.1 + 0.3 \\
P(s) &= P(m,s) + P(f,s) = 0.4 + 0.2
\end{aligned}$$

$P(m,l) = 0.1$	$P(m,s) = 0.4$	$P(m) = 0.5$
$P(f,l) = 0.3$	$P(f,s) = 0.2$	$P(f) = 0.5$
$P(l) = 0.4$	$P(s) = 0.6$	

Podmíněná pravděpodobnost

Podmíněná pravděpodobnost $P(A|B)$ je pravděpodobnostní distribuce veličiny A splňující vztah $P(A|B) \cdot P(B) = P(A, B)$.

Jestliže $P(B)$ je nenulové pak $P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}$.

$$P(male, long) = 0.1$$
$$P(male, short) = 0.4$$
$$P(female, long) = 0.3$$
$$P(female, short) = 0.2$$

	long	*short*
male	$P(m, l) = 0.1$	$P(m, s) = 0.4$
female	$P(f, l) = 0.3$	$P(f, s) = 0.2$

$$P(male|long) = \frac{P(male, long)}{P(long)} = \frac{0.1}{0.4} = 1/4$$

Bayesův vzorec

$$P(A|B) \quad = \quad \frac{P(A,B)}{P(B)} \; = \; \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{\sum_A P(A,B)} \; = \; \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{\sum_A P(B|A) \cdot P(A)}$$

Například mějme dvě veličiny:

- R - *Rain* ... v noci pršelo s hodnotami $y = yes$ a $n = no$.
- W - *Wet grass* ... tráva je mokrá s hodnotami $y = yes$ a $n = no$.

Víme, že:

- jestliže v noci pršelo, pak je tráva mokrá s pravděpodobností $\frac{3}{4}$,
- jestliže nepršelo, pak je tráva mokrá s pravděpodobností $\frac{1}{8}$,
- pravděpodobnost, že bude v noci pršet je $\frac{1}{3}$.

Ráno vidíme, že tráva je mokrá. Jaká je pravděpodobnost, že v noci pršelo?

Použití Bayesova vzorce

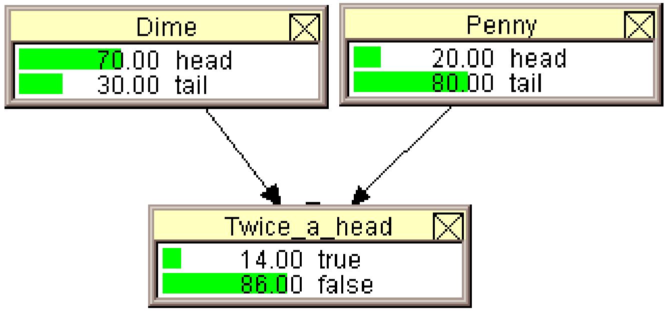
$$P(R = y|W = y)$$

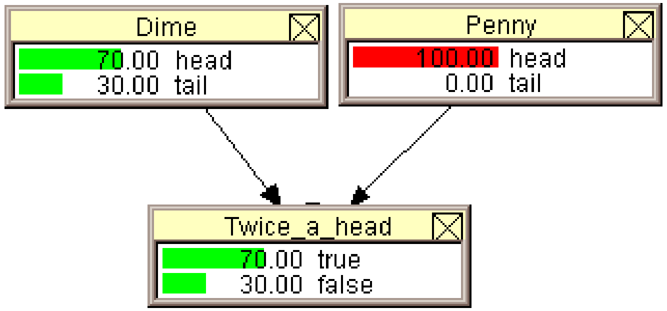
$$= \frac{P(W = y|R = y) \cdot P(R = y)}{P(W = y|R = y) \cdot P(R = y) + P(W = y|R = n) \cdot P(R = n)}$$

$$= \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{12}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{4}{12}} = \frac{3}{4}$$

Pravděpodobnost, že v noci pršelo je $\frac{3}{4}$.

Nezávislost





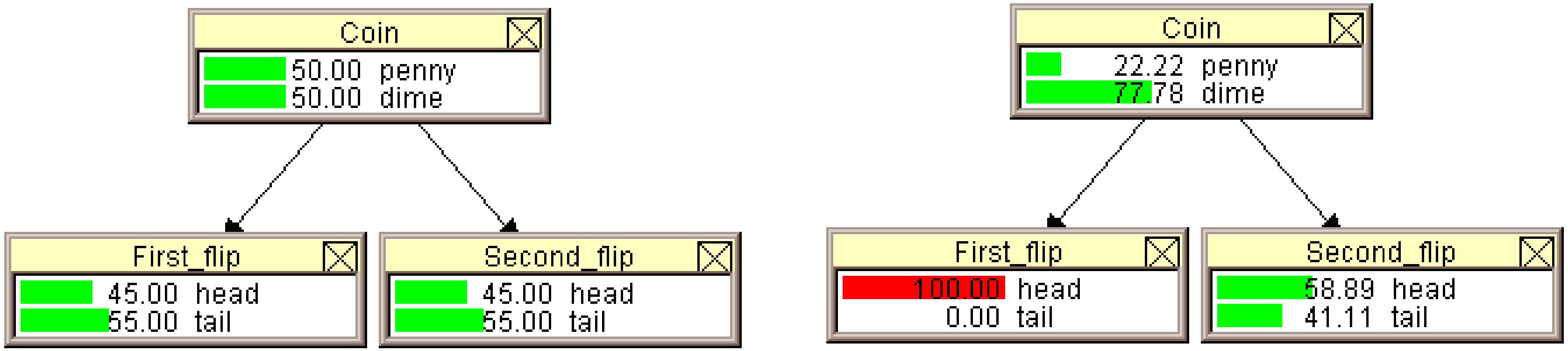
Pravděpodobnost společného výskytu hodnot veličin je rovna součinu pravděpodobností jednotlivých pravděpodobností.

$$P(Dime = head, Penny = head) \quad = \quad P(Dime = head) \cdot P(Penny = head)$$

Též, zjistíme-li hodnotu jedné veličiny, nemá to vliv na hodnotu druhé veličiny.

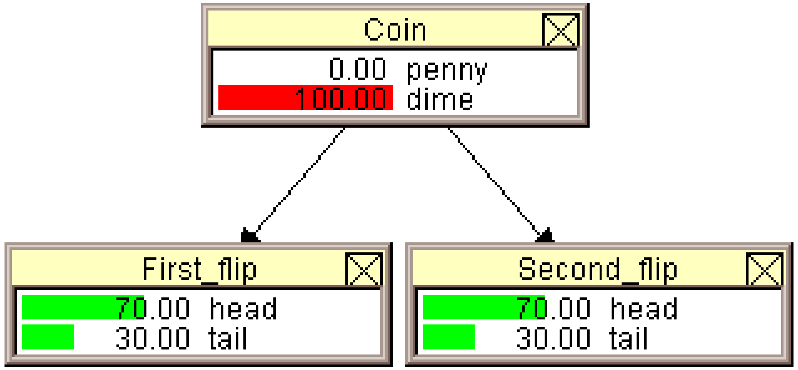
$$P(Dime = head|Penny = head) = P(Dime = head)$$

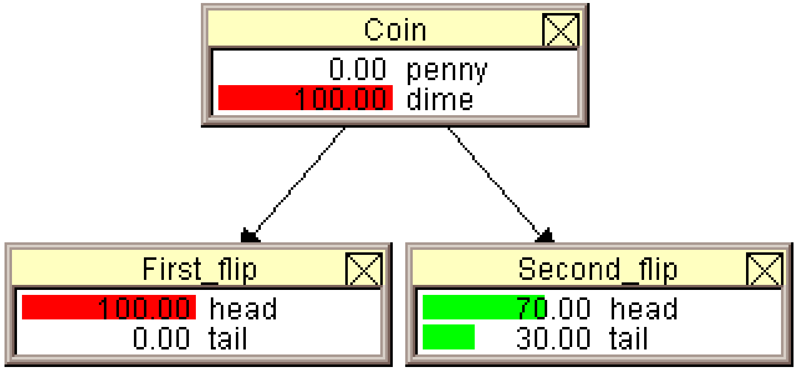
Náhodně vybereme jednu minci pro dva hody.



První hod má vliv na pravděpodobnost výsledku druhého hodu.

Nyní, předpokládejme, že známe vybranou minci.





Jestliže víme, která mince bude použita pak výsledek prvního hodu nemá vliv na pravděpodobnost výsledku druhého hodu.

Podmíněná nezávislost

Pravděpodobnost společného výskytu hodnot veličin při dané hodnotě třetí veličiny je rovna součinu pravděpodobností jednotlivých podmíněných pravděpodobností:

$$\begin{aligned}
& P(First_flip = head, Second_flip = head | Coin = dime) \\
= \quad & P(First_flip = head | Coin = dime) \cdot P(Second_flip = head | Coin = dime)
\end{aligned}$$

Jestliže neznáme minci, výsledek prvního hodu má vliv na pravděpodobnost výsledku druhého hodu.

Jestliže známe minci, pak výsledek prvního hodu nemá vliv na pravděpodobnost výsledku druhého hodu.

$$\begin{aligned}
& P(Second_flip = head | Coin = dime, First_flip = head) \\
= \quad & P(Second_flip = head | Coin = dime)
\end{aligned}$$

Řetězcové pravidlo

Z definice podmíněné pravděpodobnosti plyne, že můžeme psát:

$$
\begin{aligned}
P(A, B, C, D) &= P(A|B, C, D) \cdot P(B, C, D) \\
&= P(A|B, C, D) \cdot P(B|C, D) \cdot P(C, D) \\
&= P(A|B, C, D) \cdot P(B|C, D) \cdot P(C|D) \cdot P(D)
\end{aligned}
$$

Proč je Holmesův trávník mokrý?

$Holm$	Je Holmesův trávník mokrý?
Rn	Pršelo v noci?
$Sprnk$	Byl Holmesův postřikovač zapnutý?
Wat	Je Watsonův trávník mokrý?

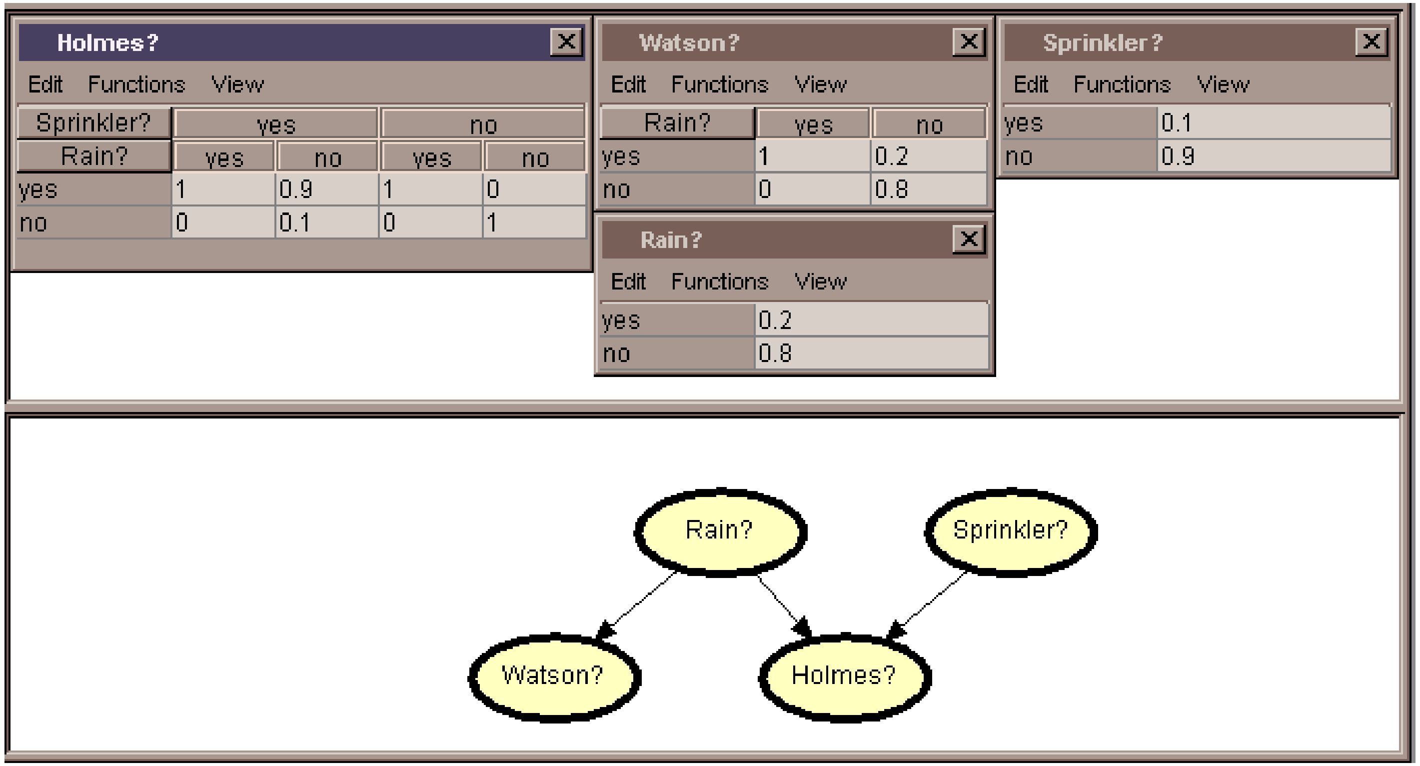
- Holmesův trávník může být mokrý buď protože pršelo, nebo protože měl zapnutý postřikovač.
- Watsonův trávník může být mokrý protože pršelo. Holmesův postřikovač nemá vliv na Watsonův trávník.
- Déšť nesouvisí s tím, jestli má Holmes zapnutý postřikovač.

Řetězcové pravidlo a podmíněné nezávislosti uvedené výše dávají:

$$
\begin{aligned}
&P(Holm, Wat, Rn, Sprnk) \\
&\quad = \quad P(Holm|Wat, Rn, Sprnk) \cdot P(Wat|Rn, Sprnk) \cdot P(Rn|Sprnk) \cdot P(Sprnk) \\
&\quad = \quad P(Holm|Rn, Sprnk) \cdot P(Wat|Rn) \cdot P(Rn) \cdot P(Sprnk)
\end{aligned}
$$

Proč je Holmesův trávník mokrý?

$$
\begin{aligned}
& P(Holm, Wat, Rn, Sprnk) \\
= \quad & P(Holm|Rn, Sprnk) \cdot P(Wat|Rn) \cdot P(Rn) \cdot P(Sprnk)
\end{aligned}
$$

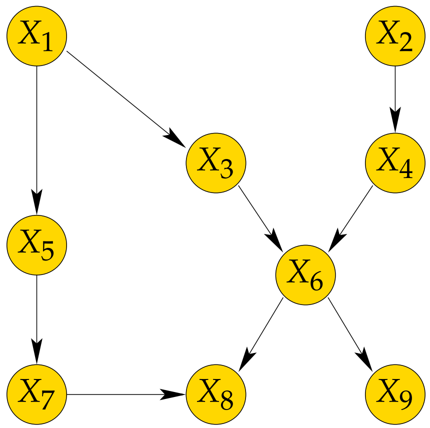


Definice bayesovské sítě

- acyklický orientovaný graf (DAG) $G = (V, E)$
- každý uzel $i \in V$ odpovídá jedné náhodné veličině X_i s konečným počtem navzájem disjunktních hodnot $\mathbb{X}_i$
- $pa(i)$ bude označovat množinu rodičů uzlu i v grafu G
- ke každému uzlu $i \in V$ odpovídá podmíněná pravděpodobnostní distribuce $P(X_i \mid (X_j)_{j \in pa(i)})$
- acyklický orientovaný graf (DAG) reprezentuje podmíněné nezávislostní vztahy mezi veličinami $(X_i)_{i \in V}$

Podmíněné nezávislost dané grafem

Předpokládejme uspořádání veličin $X_i, i \in V$ takové, že jestliže $j \in pa(i)$ pak $j < i$.

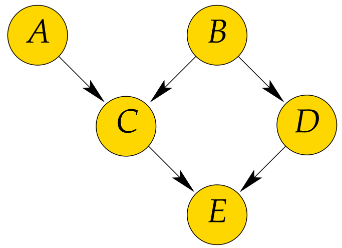


Z grafu vyplývají následující podmíněné nezávislosti

$$X_i \perp\!\!\!\perp X_k \mid (X_j)_{j \in pa(i)} \qquad \text{for } i \in V \text{ and } k < i \text{ and } k \notin pa(i)$$

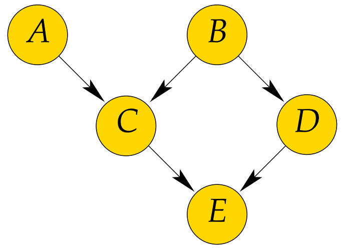
Například $X_6 \perp\!\!\!\perp X_1, X_2, X_5 \mid X_3, X_4$.

Podmíněné nezávislosti dané grafem



Otázky:

- Nalezněte pořadí splňující požadavek na uspořádání: jestliže $j \in pa(i)$ pak $j < i$.
- Kolik je uspořádáních splňující tento požadavek?
- Jaké nezávislosti plynou z daného uspořádání?
- Jaká pravděpodobnostní distribuce splňuje dané nezávislosti a platí, že její podmíněné marginální distribuce odpovídající distribucím $P(A)$, $P(B)$, $P(C \mid A, B)$, $P(D \mid B)$ a $P(E \mid C, D)$.



Pořadí splňující požadavek: jestliže $j \in pa(i)$ pak $j < i$ jsou

A	B	C	D	E	2	3	4	5
1	2	3	4	5	$B \perp\!\!\!\perp A$	-	$D \perp\!\!\!\perp A, C \mid B$	$E \perp\!\!\!\perp A, B \mid C, D$
2	1	3	4	5	$A \perp\!\!\!\perp B$	-	$D \perp\!\!\!\perp A, C \mid B$	$E \perp\!\!\!\perp A, B \mid C, D$
1	2	4	3	5	$B \perp\!\!\!\perp A$	$D \perp\!\!\!\perp A \mid B$	$C \perp\!\!\!\perp D \mid A, B$	$E \perp\!\!\!\perp A, B \mid C, D$
2	1	4	3	5	$A \perp\!\!\!\perp B$	$D \perp\!\!\!\perp A \mid B$	$C \perp\!\!\!\perp D \mid A, B$	$E \perp\!\!\!\perp A, B \mid C, D$
3	1	4	2	5	-	$A \perp\!\!\!\perp B$	$C \perp\!\!\!\perp D \mid A, B$	$E \perp\!\!\!\perp A, B \mid C, D$

Pravděpodobnostní distribuce bayesovské sítě

Použijeme-li řetězcové pravidlo dostaneme:

$$P((X_i)_{i\in V}) \quad = \quad \prod_{i\in V} P(X_i \mid X_{i-1},\ldots,X_1)$$

Použijeme-li podmíněné nezávislosti z grafu pak dostaneme

$$P((X_i)_{i\in V}) \quad = \quad \prod_{i\in V} P(X_i \mid (X_j)_{j\in pa(i)})$$

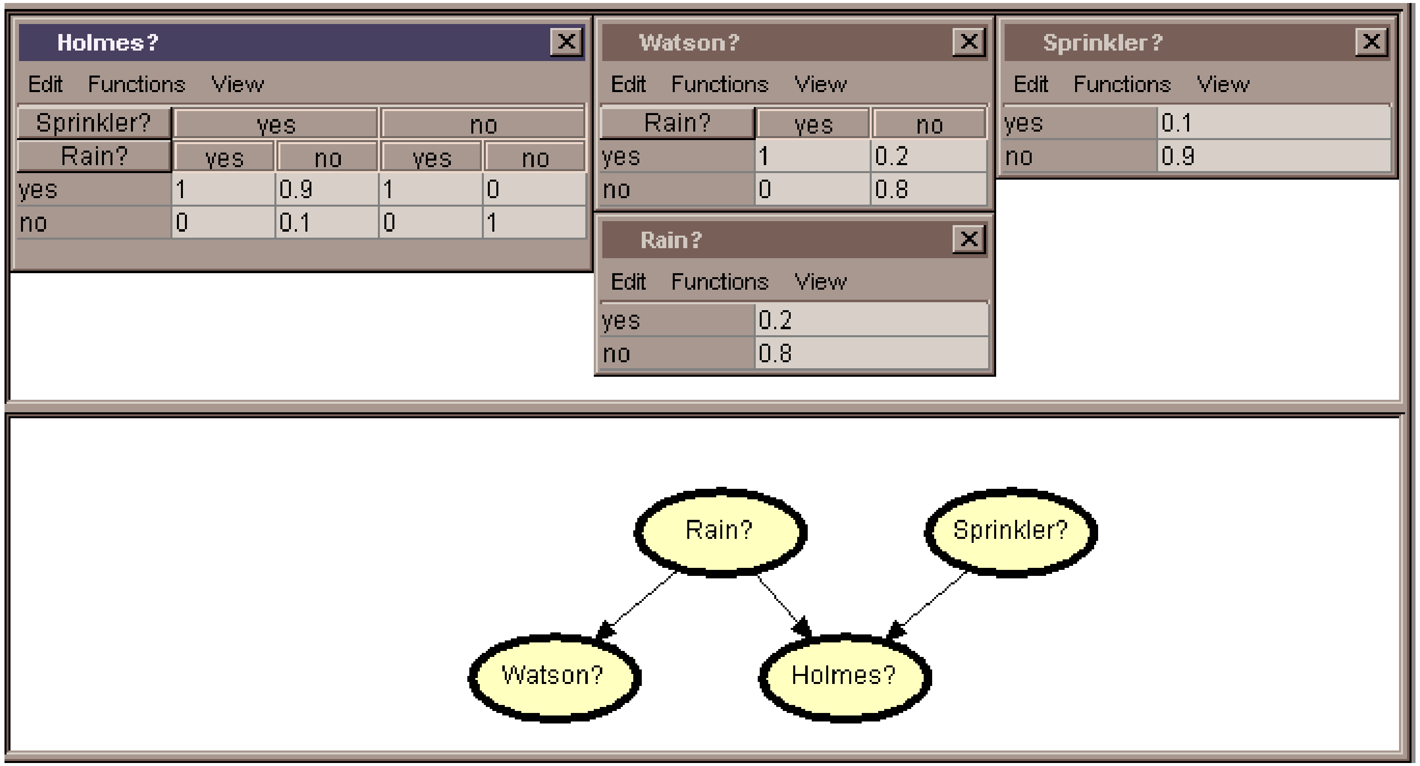
- pravděpodobnostní distribuci representovanou bayesovskou sítí.

Pro tuto distribuci platí:

- splňuje všechny podmíněné nezávisloti z grafu a
- její podmíněné pravděpodobnostní distribuce odpovídají $P(X_i \mid (X_j)_{j\in pa(i)})$, $i \in V$.

Příklad bayesovské sítě

$$
\begin{aligned}
& P(Holm, Wat, Rn, Sprnk) \\
= \quad & P(Holm|Rn, Sprnk) \cdot P(Wat|Rn) \cdot P(Rn) \cdot P(Sprnk)
\end{aligned}
$$



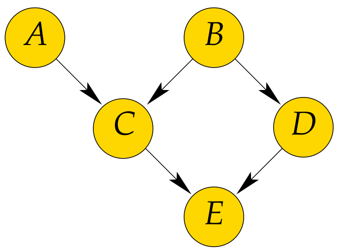
Podmíněné nezávislosti dané grafem - d-separace

Dva uzly i a j jsou d-separovány množinou uzlů $\mathcal{Y}$, jestliže pro všechny cesty mezi i a j platí:

- cesta obsahuje uzel, ve kterém se hrany **nesetkávají** "head-to-head" a který **náleží** do $\mathcal{Y}$ nebo
- cesta obsahuje uzel, ve kterém se hrany **setkávají** "head-to-head" a ani on, ani žádný jeho následník **nenáleží** do $\mathcal{Y}$.

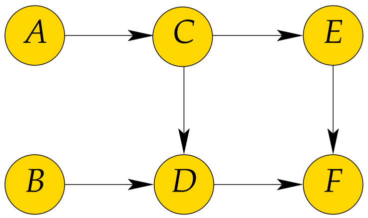
Jestliže i a j jsou d-separovány množinou uzlů $\mathcal{Y}$, pak veličiny X_i a X_j jsou nezávislé dáno $(X_k)_{k\in\mathcal{Y}}$.

Příklad:



$$A \perp\!\!\!\perp D$$
$$A \not\!\perp\!\!\!\perp D \mid E$$
$$C \not\!\perp\!\!\!\perp D$$
$$C \perp\!\!\!\perp D \mid B$$

Ověřte, zda platí v grafu podmíněné nezávislosti



$$E \perp\!\!\!\perp B$$

$$E \perp\!\!\!\perp D$$

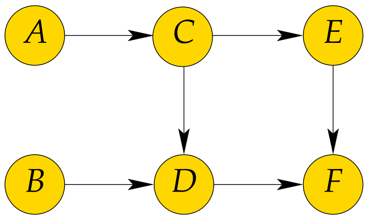
$$E \perp\!\!\!\perp D \mid A$$

$$E \perp\!\!\!\perp D \mid C$$

$$E \perp\!\!\!\perp D \mid C, F$$

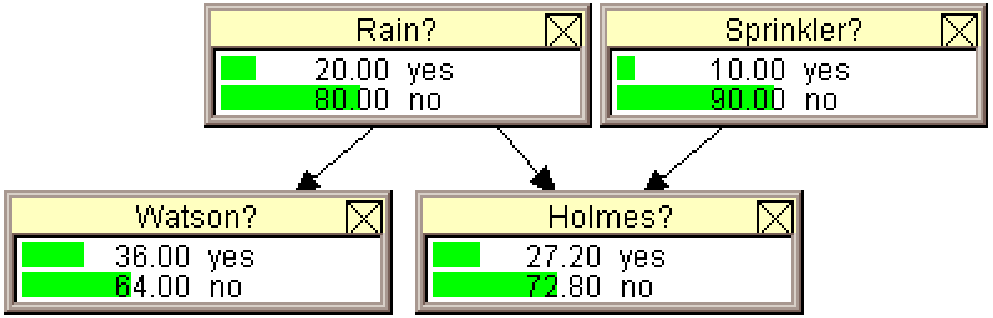
$$E \perp\!\!\!\perp B \mid F$$

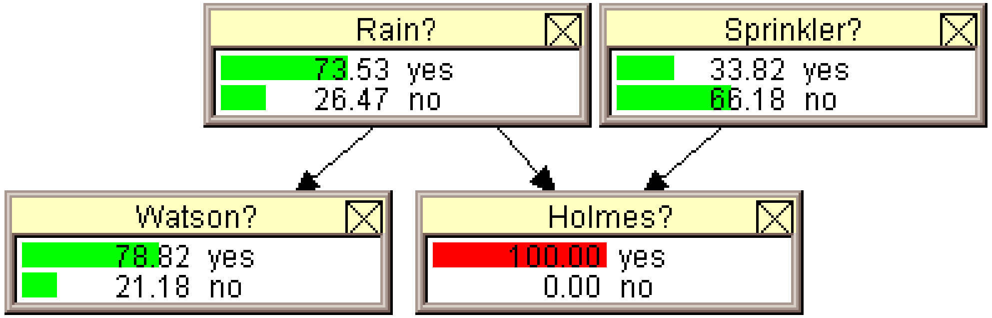
Ověřte, zda platí v grafu podmíněné nezávislosti

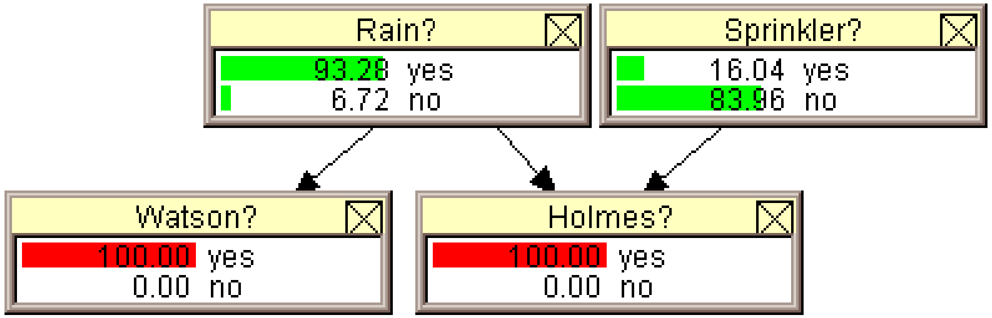


$E \perp\!\!\!\perp B$	ano
$E \perp\!\!\!\perp D$	ne
$E \perp\!\!\!\perp D \mid A$	ne
$E \perp\!\!\!\perp D \mid C$	ano
$E \perp\!\!\!\perp D \mid C, F$	ne
$E \perp\!\!\!\perp B \mid F$	ne

Byl Holmesův postřikovač zapnutý?



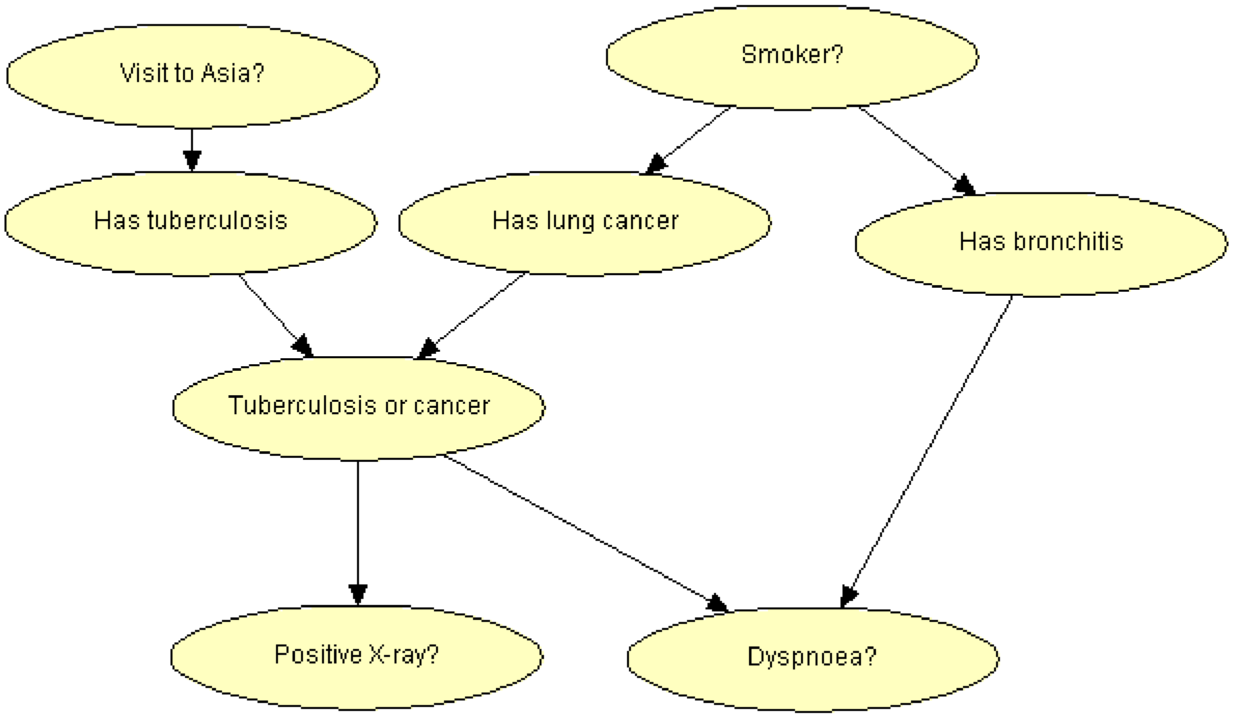




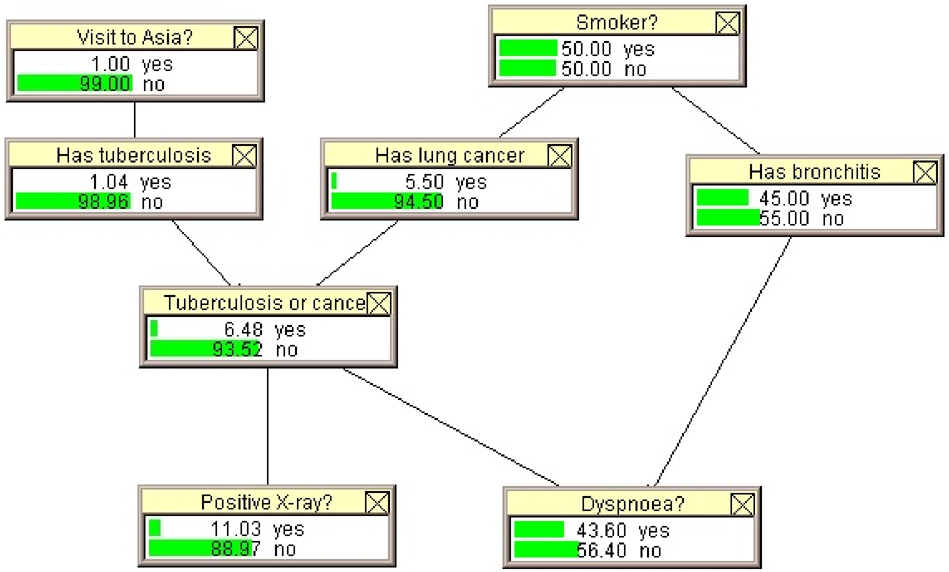
Zjednodušený diagnostický příklad

Vyšetřujeme pacienta.

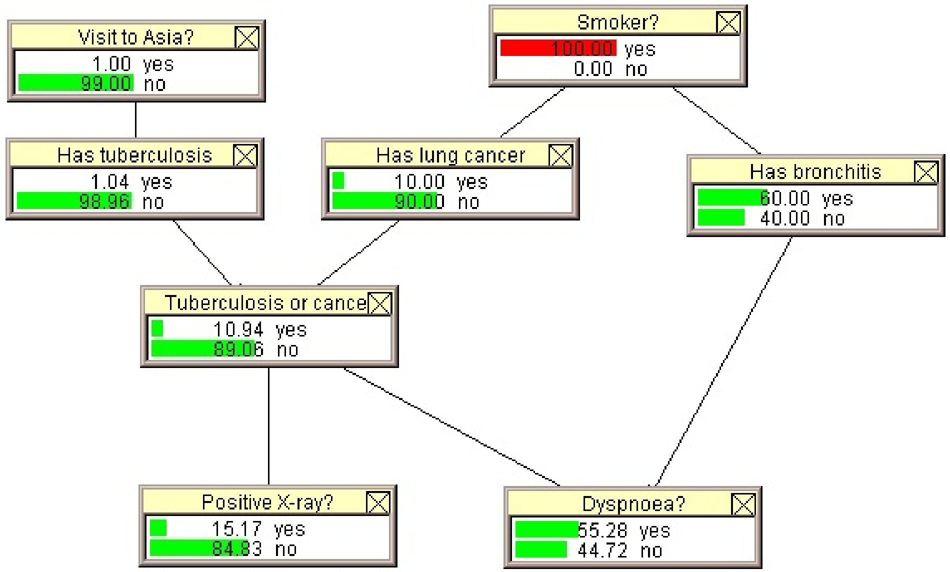
Možná diagnóza je: tuberkulóza, rakovina plic, nebo zánět průdušek.



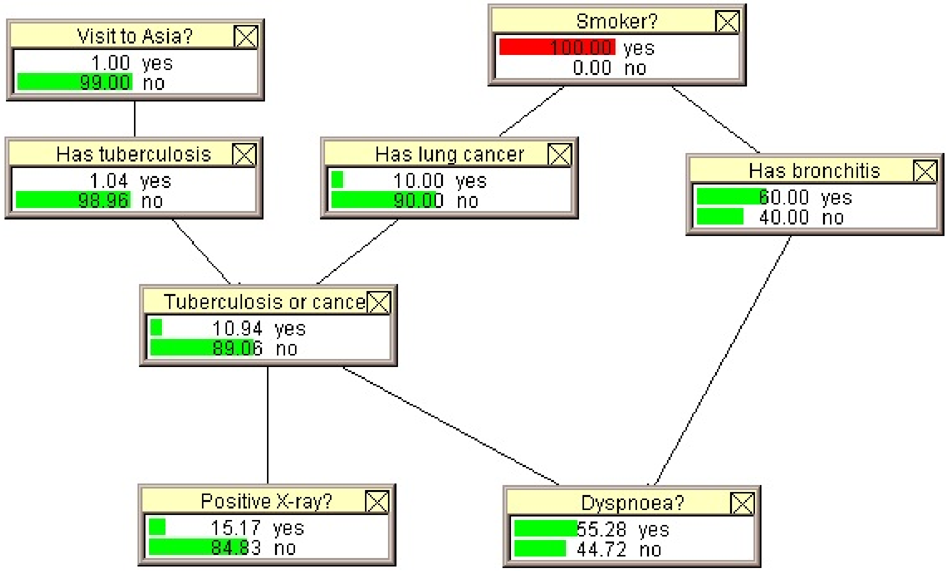
Zatím nevíme o pacientovi nic.



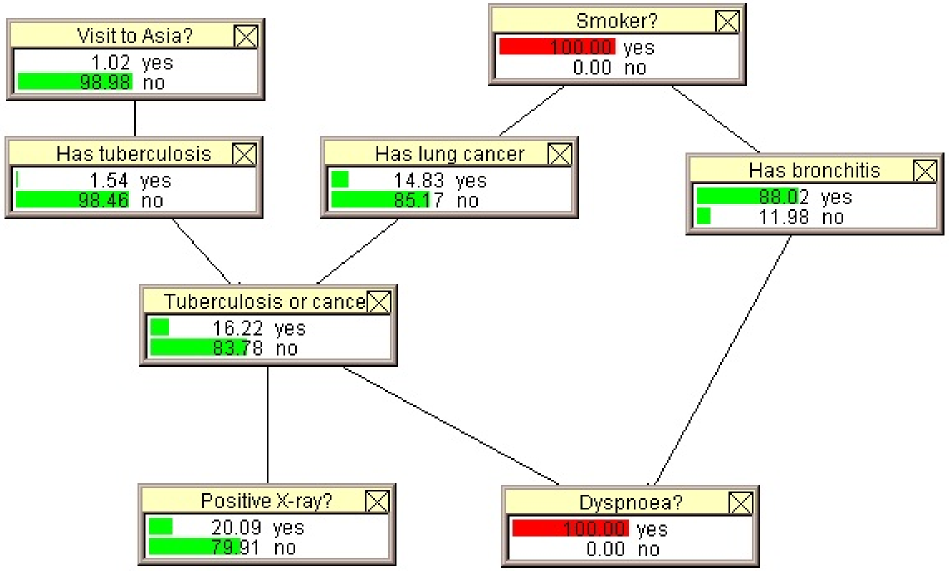
Pacient je kuřák.



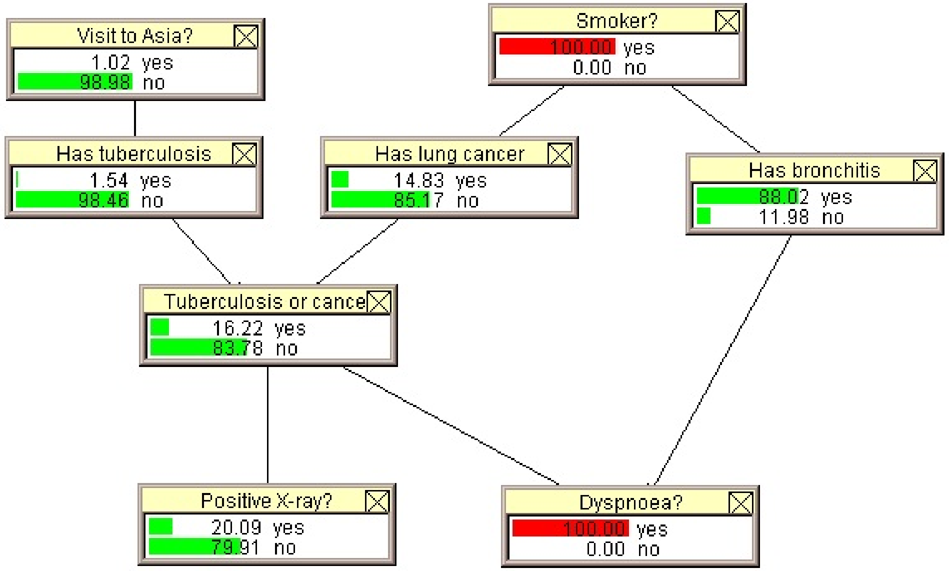
Pacient je kuřák

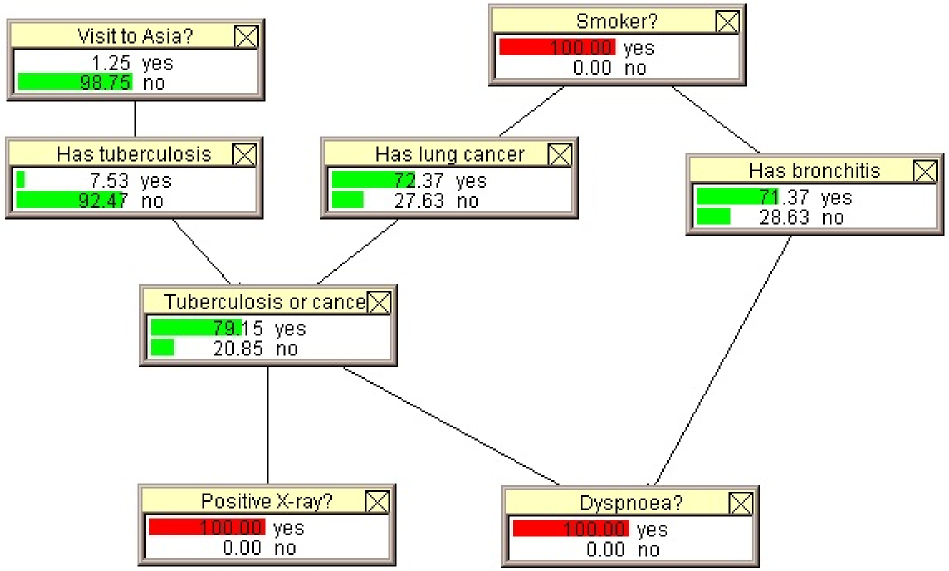


... a navíc si stěžuje na dušnost



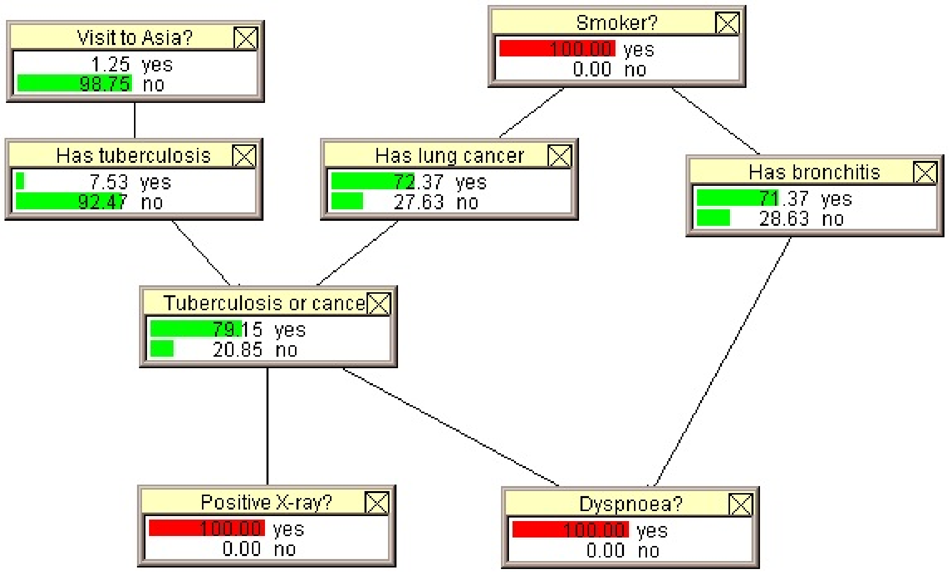
Pacient je kuřák, stěžuje si na dušnost ... a navíc jeho RTG je positivní



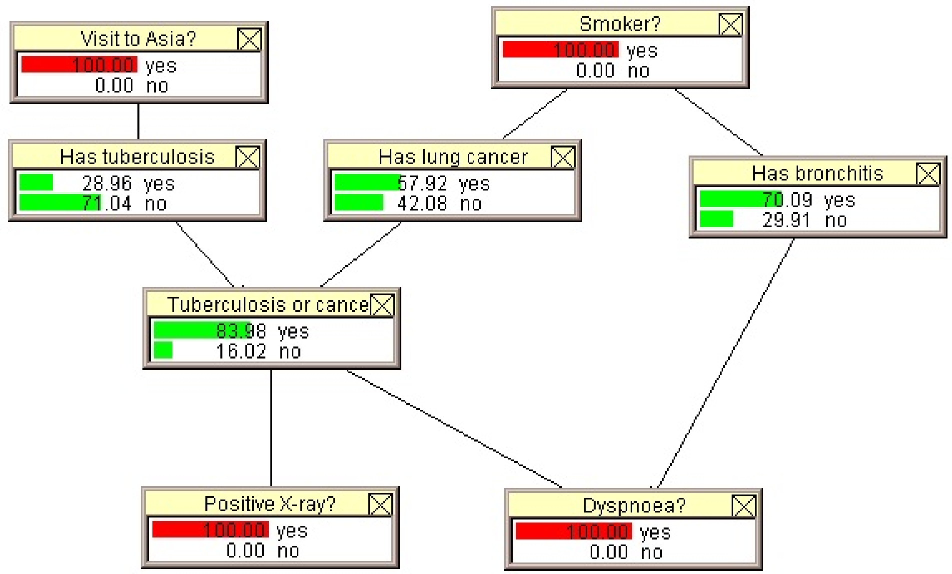


Pacient je kuřák, stěžuje si na dušnost,

jeho RTG je positivní



... a navíc byl v Asii

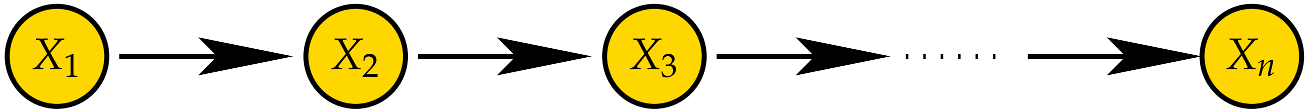


Výhoda reprezentace bayesovskou sítí

Předpokládejme, že máme problém, který budeme modelovat pomocí n veličin a každá veličina může nabývat dvou hodnot.

Použijeme-li representaci pomocí jedné tabulky potřebujeme pro uložení v paměti počítače distribuce $2^n - 1$ hodnot.

Předpokládejme, bayesovskou síť mající též n veličin nabývajících dvou hodnot s grafem následující struktury:



Pro její uložení v paměti počítače potřebujeme $1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$ hodnot.

Výhoda reprezentace bayesovskou sítí

n	$2^n - 1$	$2n - 1$
2	3	3
3	7	5
4	15	7
10	1023	19
100	$1.27 \cdot 10^{30}$	199
1000	$1.07 \cdot 10^{301}$	1999

Typické použití bayesovských sítí

- pro modelování a vysvětlení chování, problémů v různých oblastech - např. model chování vody v krajině,
- pro přepočtení pravděpodobností hodnot určitých veličin když jsme pozorovali některé jiné veličiny, t.j. počítání podmíněných pravděpodobností, např. $P(X_{23}|X_{17} = yes, X_{54} = no)$ - např. určení diagnózy při pozorovaných příznacích.
- pro nalezení nejpravděpodobnějších konfigurací proměných - např. při automatickém rozpoznávání řeči, nebo při dekódování zakódovaných zpráv,
- pro podporu rozhodování při nejisté informaci - použití teorie maximalizace očekávaného užitku (ukázka),
- pro nalezení dobrých strategií pro řešení problémů v oblastech z nejistotou - např. technická diagnostika laserových tiskáren, nebo návrh adaptivních testů (přednáška za týden).

Z historie bayesovských sítí - 1

Bayesovské sítě patří mezi pravděpodobnostní grafické modely.

- První použití modelů podobných grafickým modelům

  ve statistické mechanice (Gibbs, 1902),

  genetice (Wright, 1921),

  analýze kontingenčních tabulek (Barlett, 1935).

- Skutečné rošíření myšlenky použití grafických modelů až v osmdesátých letech 20.století:

  Pearl (1982),

  Spiegelhalter a Kill-Jones (1984),

  Perez a Jiroušek (1985),

  Lauritzen a Spiegelhalter (1988)

Z historie bayesovských sítí - 2

- Vychází základní monografie o grafických modelech a bayesovských sítích:

  Pearl (1988), Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference,

  Neapolitan (1990), Probabilistic reasoning in expert systems: theory and algorithms,

  Hájek, Havránek, Jiroušek (1991), Uncertain Information Processing in Expert Systems,

  Lauritzen (1996), Graphical models,

  Jensen (1996), An introduction to Bayesian networks.

Z historie bayesovských sítí - 3

- Objevují se aplikace bayesovských sítích v různých oblastech:

  Munin (1989) - Bayesian network for the median nerve

  Pathfinder (1990) - lymph-node pathology,

  Decision theoretic troubleshooting (1994) - technická diagnostika zařízení.

- Objevují se první verze software umožňující práci s bayesovskými sítěmi:

  Hugin (1989) `http://www.hugin.com`,

  Netica (1995) `http://www.norsys.com`,