

Kdo má spolehlivý recept na správné rozhodování?

Jiří Vomlel

Ústav teorie informace a automatizace (ÚTIA)
Akademie věd České republiky
<http://www.utia.cz/vomlel>

Praha, 11. listopadu 2013

Rozhodování jako volba mezi různými alternativami

Co budeme dělat v sobotu?

Rozhodování jako volba mezi různými alternativami

Co budeme dělat v sobotu?

1. Půjdeme do kina a pak do baru.

Rozhodování jako volba mezi různými alternativami

Co budeme dělat v sobotu?

1. Půjdeme do kina a pak do baru.
2. Pojedeme na výlet na kole.

Rozhodování jako volba mezi různými alternativami

Co budeme dělat v sobotu?

1. Půjdeme do kina a pak do baru.
2. Pojedeme na výlet na kole.

	Klady	Zápory
Ad 1.	+ film se nám bude líbit + bude veselo	– film se nám nebude líbit – druhý den nás bude bolet hlava – finanční náklady
Ad 2.	+ bude-li pěkné počasí, výlet si užijeme + nízké finanční náklady	– bude-li pršet, nebude se nám vý- let líbit – budou nás bolet nohy

Rozhodování jako volba mezi různými alternativami

Co budeme dělat v sobotu?

1. Půjdeme do kina a pak do baru.
2. Pojedeme na výlet na kole.

	Klady	Zápory
Ad 1.	+ film se nám bude líbit + bude veselo	– film se nám nebude líbit – druhý den nás bude bolet hlava – finanční náklady
Ad 2.	+ bude-li pěkné počasí, výlet si užijeme + nízké finanční náklady	– bude-li pršet, nebude se nám vý- let líbit – budou nás bolet nohy

- Která varianta je lepší?

Rozhodování jako volba mezi různými alternativami

Co budeme dělat v sobotu?

1. Půjdeme do kina a pak do baru.
2. Pojedeme na výlet na kole.

	Klady	Zápory
Ad 1.	+ film se nám bude líbit + bude veselo	– film se nám nebude líbit – druhý den nás bude bolet hlava – finanční náklady
Ad 2.	+ bude-li pěkné počasí, výlet si užijeme + nízké finanční náklady	– bude-li pršet, nebude se nám vý- let líbit – budou nás bolet nohy

- Která varianta je lepší?
- Jak je pravděpodobné, že se nám vybraný film bude líbit?

Rozhodování jako volba mezi různými alternativami

Co budeme dělat v sobotu?

1. Půjdeme do kina a pak do baru.
2. Pojedeme na výlet na kole.

	Klady	Zápory
Ad 1.	+ film se nám bude líbit + bude veselo	– film se nám nebude líbit – druhý den nás bude bolet hlava – finanční náklady
Ad 2.	+ bude-li pěkné počasí, výlet si užijeme + nízké finanční náklady	– bude-li pršet, nebude se nám vý- let líbit – budou nás bolet nohy

- Která varianta je lepší?
- Jak je pravděpodobné, že se nám vybraný film bude líbit?
- Jak je pravděpodobné, že v sobotu bude pršet?

Ve které hře lze očekávat větší zisk?

Ve které hře lze očekávat větší zisk?



- (A) Padne-li šestka, získáte 60 Kč.
Padne-li jiný počet ok, nezískáte nic.



- (B) Padne-li sudý počet ok, získáte 30 Kč.
Padne-li lichý počet ok, nezískáte nic.

Ve které hře lze očekávat větší zisk?



- (A) Padne-li šestka, získáte 60 Kč.
Padne-li jiný počet ok, nezískáte nic.

$$\begin{aligned}u &= P(X = 6) \cdot 60 + P(X \neq 6) \cdot 0 \\&= \frac{1}{6} \cdot 60 = 10\end{aligned}$$



- (B) Padne-li sudý počet ok, získáte 30 Kč.
Padne-li lichý počet ok, nezískáte nic.

Ve které hře lze očekávat větší zisk?



- (A) Padne-li šestka, získáte 60 Kč.
Padne-li jiný počet ok, nezískáte nic.

$$\begin{aligned}u &= P(X = 6) \cdot 60 + P(X \neq 6) \cdot 0 \\&= \frac{1}{6} \cdot 60 = 10\end{aligned}$$



- (B) Padne-li sudý počet ok, získáte 30 Kč.
Padne-li lichý počet ok, nezískáte nic.

$$\begin{aligned}v &= P(X \in \{2, 4, 6\}) \cdot 30 + P(X \in \{1, 2, 3\}) \cdot 0 \\&= \frac{1}{2} \cdot 30 = 15\end{aligned}$$

Ve které hře lze očekávat větší zisk?



- (A) Padne-li šestka, získáte 60 Kč.
Padne-li jiný počet ok, nezískáte nic.

$$\begin{aligned}u &= P(X = 6) \cdot 60 + P(X \neq 6) \cdot 0 \\&= \frac{1}{6} \cdot 60 = 10\end{aligned}$$



- (B) Padne-li sudý počet ok, získáte 30 Kč.
Padne-li lichý počet ok, nezískáte nic.

$$\begin{aligned}v &= P(X \in \{2, 4, 6\}) \cdot 30 + P(X \in \{1, 2, 3\}) \cdot 0 \\&= \frac{1}{2} \cdot 30 = 15\end{aligned}$$

Hra (B) má větší očekávaný zisk.

Úvěrové rozhodování banky: Poskytneme klientovi úvěr?

	příjem	zůstatek účtu	zaměstnán	výše úvěru	úvěr
1	vysoký	střední	ano	1.000.000	ano
2	střední	nízký	ano	500.000	ano
3	nízký	nízký	ano	800.000	ne
4	nízký	střední	ne	2.000.000	ne
5	střední	vysoký	ne	600.000	ano

Úvěrové rozhodování banky: Poskytneme klientovi úvěr?

	příjem	zůstatek účtu	zaměstnán	výše úvěru	úvěr
1	vysoký	střední	ano	1.000.000	ano
2	střední	nízký	ano	500.000	ano
3	nízký	nízký	ano	800.000	ne
4	nízký	střední	ne	2.000.000	ne
5	střední	vysoký	ne	600.000	ano

očekávaná ztráta = pravděpodobnost nesplacení * výše úvěru

$$v_1 = 0.01 * 1.000.000 = 10.000$$

$$v_2 = 0.05 * 500.000 = 25.000$$

$$v_3 = 0.2 * 800.000 = 160.000$$

$$v_4 = 0.3 * 2.000.000 = 600.000$$

$$v_5 = 0.06 * 600.000 = 36.000$$

Pozorování

- Lidé se často musí rozhodovat i v situacích, kdy:
 - není jisté jak se situace vyvine, nebo
 - detailně neznají podstatu věcí, o kterých rozhodují.

Pozorování

- Lidé se často musí rozhodovat i v situacích, kdy:
 - není jisté jak se situace vyvine, nebo
 - detailně neznají podstatu věcí, o kterých rozhodují.
- Rozhodování je často třeba i v případě nejistých výsledků.

Pozorování

- Lidé se často musí rozhodovat i v situacích, kdy:
 - není jisté jak se situace vyvine, nebo
 - detailně neznají podstatu věcí, o kterých rozhodují.
- Rozhodování je často třeba i v případě nejistých výsledků.
- Při rozhodování využijeme pravděpodobnosti možných jevů.

Pozorování

- Lidé se často musí rozhodovat i v situacích, kdy:
 - není jisté jak se situace vyvine, nebo
 - detailně neznají podstatu věcí, o kterých rozhodují.
- Rozhodování je často třeba i v případě nejistých výsledků.
- Při rozhodování využijeme pravděpodobnosti možných jevů.
- Ohodnotíme výsledky všech možných jevů užitkovou funkcí.

Pozorování

- Lidé se často musí rozhodovat i v situacích, kdy:
 - není jisté jak se situace vyvine, nebo
 - detailně neznají podstatu věcí, o kterých rozhodují.
- Rozhodování je často třeba i v případě nejistých výsledků.
- Při rozhodování využijeme pravděpodobnosti možných jevů.
- Ohodnotíme výsledky všech možných jevů užitkovou funkcí.
- Rozhodneme se pro variantu s největším očekávaným užitekem.

Pravděpodobnost jevu

Přístup 1: Pro každý možný jev spočítáme jeho pravděpodobnost.

Pravděpodobnost jevu

Přístup 1: Pro každý možný jev spočítáme jeho pravděpodobnost.

Pravděpodobnost nesplacení úvěru

příjem	zůstatek	zaměstnán	pravděpodobnost nesplacení
vysoký	vysoký	ano	p_1
vysoký	vysoký	ne	p_2
vysoký	střední	ano	p_3
...			
nízký	nízký	ano	p_{17}
nízký	nízký	ne	p_{18}

Pravděpodobnost jevu

Přístup 1: Pro každý možný jev spočítáme jeho pravděpodobnost.

Pravděpodobnost nesplacení úvěru

příjem	zůstatek	zaměstnán	pravděpodobnost nesplacení
vysoký	vysoký	ano	p_1
vysoký	vysoký	ne	p_2
vysoký	střední	ano	p_3
...			
nízký	nízký	ano	p_{17}
nízký	nízký	ne	p_{18}

- Potřebujeme $3 * 3 * 2 = 18$ pravděpodobností.

Pravděpodobnost jevu

Přístup 1: Pro každý možný jev spočítáme jeho pravděpodobnost.

Pravděpodobnost nesplacení úvěru

příjem	zůstatek	zaměstnán	pravděpodobnost nesplacení
vysoký	vysoký	ano	p_1
vysoký	vysoký	ne	p_2
vysoký	střední	ano	p_3
...			
nízký	nízký	ano	p_{17}
nízký	nízký	ne	p_{18}

- Potřebujeme $3 * 3 * 2 = 18$ pravděpodobností.
- Můžeme je získat ze shromážděných dat.

Pravděpodobnost jevu

Přístup 1: Pro každý možný jev spočítáme jeho pravděpodobnost.

Pravděpodobnost nesplacení úvěru

příjem	zůstatek	zaměstnán	pravděpodobnost nesplacení
vysoký	vysoký	ano	p_1
vysoký	vysoký	ne	p_2
vysoký	střední	ano	p_3
...			
nízký	nízký	ano	p_{17}
nízký	nízký	ne	p_{18}

- Potřebujeme $3 * 3 * 2 = 18$ pravděpodobností.
- Můžeme je získat ze shromážděných dat.
- Co když veličiny nebudou 3 ale 30 a budou tříhodnotové?

Pravděpodobnost jevu

Přístup 1: Pro každý možný jev spočítáme jeho pravděpodobnost.

Pravděpodobnost nesplacení úvěru

příjem	zůstatek	zaměstnán	pravděpodobnost nesplacení
vysoký	vysoký	ano	p_1
vysoký	vysoký	ne	p_2
vysoký	střední	ano	p_3
...			
nízký	nízký	ano	p_{17}
nízký	nízký	ne	p_{18}

- Potřebujeme $3 * 3 * 2 = 18$ pravděpodobností.
- Můžeme je získat ze shromážděných dat.
- Co když veličiny nebudou 3 ale 30 a budou tříhodnotové?
- Lze z dat přímo získat $3^{30} = 205.891.132.094.649$ hodnot?

Pravděpodobnost jevu

Přístup 1: Pro každý možný jev spočítáme jeho pravděpodobnost.

Pravděpodobnost nesplacení úvěru

příjem	zůstatek	zaměstnán	pravděpodobnost nesplacení
vysoký	vysoký	ano	p_1
vysoký	vysoký	ne	p_2
vysoký	střední	ano	p_3
...			
nízký	nízký	ano	p_{17}
nízký	nízký	ne	p_{18}

- Potřebujeme $3 * 3 * 2 = 18$ pravděpodobností.
- Můžeme je získat ze shromážděných dat.
- Co když veličiny nebudou 3 ale 30 a budou tříhodnotové?
- Lze z dat přímo získat $3^{30} = 205.891.132.094.649$ hodnot?
- **Nelze!**

Pravděpodobnost jevu

Přístup 1: Pro každý možný jev spočítáme jeho pravděpodobnost.

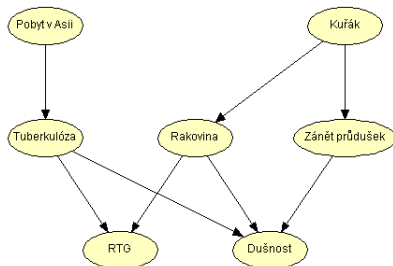
Pravděpodobnost nesplacení úvěru

příjem	zůstatek	zaměstnán	pravděpodobnost nesplacení
vysoký	vysoký	ano	p_1
vysoký	vysoký	ne	p_2
vysoký	střední	ano	p_3
...			
nízký	nízký	ano	p_{17}
nízký	nízký	ne	p_{18}

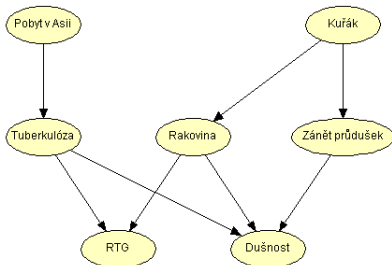
- Potřebujeme $3 * 3 * 2 = 18$ pravděpodobností.
- Můžeme je získat ze shromážděných dat.
- Co když veličiny nebudou 3 ale 30 a budou tříhodnotové?
- Lze z dat přímo získat $3^{30} = 205.891.132.094.649$ hodnot?
- **Nelze!**

Přístup 2: Vytvoříme pravděpodobnostní model.

Zjednodušený diagnostický model - Plicní klinika



Zjednodušený diagnostický model - Plicní klinika



Zadááme pouze:

$P(\text{Pobyt v Asii})$

$P(\text{Kuřák})$

$P(\text{Tuberkulóza} \mid \text{Pobyt v Asii})$

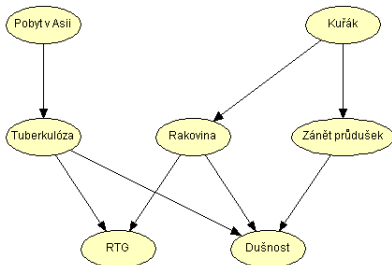
$P(\text{Rakovina} \mid \text{Kuřák})$

$P(\text{Zánět průdušek} \mid \text{Kuřák})$

$P(\text{RTG} \mid \text{Tuberkulóza}, \text{Rakovina})$

$P(\text{Dušnost} \mid \text{Tuberkulóza}, \text{Rakovina}, \text{Zánět průdušek})$

Zjednodušený diagnostický model - Plicní klinika



Zadááme pouze:

$P(\text{Pobyť v Asii})$

$P(\text{Kuřák})$

$P(\text{Tuberkulóza} \mid \text{Pobyť v Asii})$

$P(\text{Rakovina} \mid \text{Kuřák})$

$P(\text{Zánět průdušek} \mid \text{Kuřák})$

$P(\text{RTG} \mid \text{Tuberkulóza}, \text{Rakovina})$

$P(\text{Dušnost} \mid \text{Tuberkulóza}, \text{Rakovina}, \text{Zánět průdušek})$

Tento model se nazývá „bayesovská síť“.

Revd Thomas Bayes

Thomas Bayes žil v 18. století v Anglii. Byl protestantským duchovním a matematikem. Dnes je známý především pro formulaci tzv. Bayesovy věty, která udává, jak podmíněná pravděpodobnost $P(A|B)$ nějakého jevu A při pozorování jevu B souvisí s opačnou podmíněnou pravděpodobností $P(B|A)$:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} .$$



$P(\text{RTG} \mid \text{Tuberkulóza, Rakovina})$

Nejprve předpokládejme, že RTG je pozitivní právě tehdy, když pacient má tuberkulózu nebo rakovinu.

RTG	Tuberkulóza	Rakovina	p
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$P(\text{RTG} \mid \text{Tuberkulóza, Rakovina})$

Připustíme, že RTG může být pozitivní i z jiného důvodu a nemusí být nutně pozitivní ikdyž pacient má tuberkulózu nebo rakovinu.

RTG	Tuberkulóza	Rakovina	p	p'	
0	0	0	1	p_0	0.95
0	0	1	0	$p_0 * p_1$	0.019
0	1	0	0	$p_0 * p_2$	0.019
0	1	1	0	$p_0 * p_1 * p_2$	0.00038
1	0	0	0	$1 - p_0$	0.05
1	0	1	1	$1 - p_0 * p_1$	0.981
1	1	0	1	$1 - p_0 * p_2$	0.981
1	1	1	1	$1 - p_0 * p_1 * p_2$	0.99962
				$p_0, p_1, p_2 \in \langle 0, 1 \rangle$	

$P(\text{RTG} \mid \text{Tuberkulóza}, \text{Rakovina})$

Připustíme, že RTG může být pozitivní i z jiného důvodu a nemusí být nutně pozitivní ikdyž pacient má tuberkulózu nebo rakovinu.

RTG	Tuberkulóza	Rakovina	p	p'	
0	0	0	1	p_0	0.95
0	0	1	0	$p_0 * p_1$	0.019
0	1	0	0	$p_0 * p_2$	0.019
0	1	1	0	$p_0 * p_1 * p_2$	0.00038
1	0	0	0	$1 - p_0$	0.05
1	0	1	1	$1 - p_0 * p_1$	0.981
1	1	0	1	$1 - p_0 * p_2$	0.981
1	1	1	1	$1 - p_0 * p_1 * p_2$	0.99962
				$p_0, p_1, p_2 \in \langle 0, 1 \rangle$	

Tento lokální model v bayesovské síti se nazývá „**logické NEBO se šumem**“ (noisy-or).

$P(\text{RTG} \mid \text{Tuberkulóza}, \text{Rakovina})$

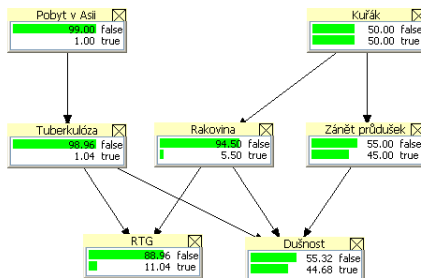
Připustíme, že RTG může být pozitivní i z jiného důvodu a nemusí být nutně pozitivní ikdyž pacient má tuberkulózu nebo rakovinu.

RTG	Tuberkulóza	Rakovina	p	p'	
0	0	0	1	p_0	0.95
0	0	1	0	$p_0 * p_1$	0.019
0	1	0	0	$p_0 * p_2$	0.019
0	1	1	0	$p_0 * p_1 * p_2$	0.00038
1	0	0	0	$1 - p_0$	0.05
1	0	1	1	$1 - p_0 * p_1$	0.981
1	1	0	1	$1 - p_0 * p_2$	0.981
1	1	1	1	$1 - p_0 * p_1 * p_2$	0.99962
				$p_0, p_1, p_2 \in \langle 0, 1 \rangle$	

Tento lokální model v bayesovské síti se nazývá „**logické NEBO se šumem**“ (noisy-or).

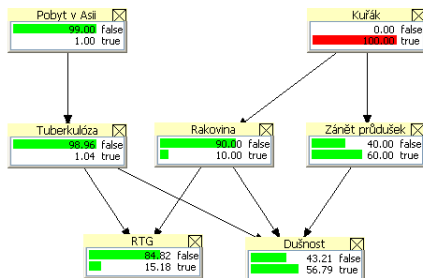
Pro jeho definici potřebujeme $k + 1$ hodnot $p_0, p_1, \dots, p_k$, kde k je počet rodičů dané proměnné.

Příklad výpočtu v bayesovské síti



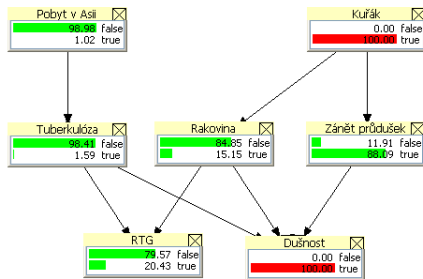
apriorní pravděpodobnost $P(X)$ všech veličin X

Příklad výpočtu v bayesovské síti



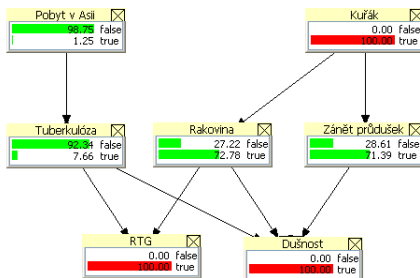
podmíněná pravděpodobnost $P(X|\text{Kuřák})$

Příklad výpočtu v bayesovské síti



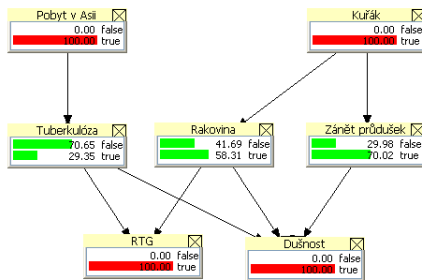
podmíněná pravděpodobnost $P(X|\text{Kuřák}, \text{Dušnost})$

Příklad výpočtu v bayesovské síti



podmíněná pravděpodobnost $P(X|\text{Kuřák, Dušnost, RTG})$

Příklad výpočtu v bayesovské síti



podmíněná pravděpodobnost

$P(X | \text{Kuřák, Dušnost, RTG, Pobyť v Asii})$

Simpsonův paradox

- pojmenován po Edwardu H. Simpsonovi, který jej popsal v roce 1951. Pravdou ale je, že Karl Pearson ho zmínil již v roce 1899 a Udny Yule v roce 1903.

Simpsonův paradox

- pojmenován po Edwardu H. Simpsonovi, který jej popsal v roce 1951. Pravdou ale je, že Karl Pearson ho zmínil již v roce 1899 a Udny Yule v roce 1903.
- spočívá v tom, že trend, který se samostatně vyskytuje v jednotlivých skupinách, se obrátí, když uvažujeme skupiny dohromady.

Simpsonův paradox

- pojmenován po Edwardu H. Simpsonovi, který jej popsal v roce 1951. Pravdou ale je, že Karl Pearson ho zmínil již v roce 1899 a Udny Yule v roce 1903.
- spočívá v tom, že trend, který se samostatně vyskytuje v jednotlivých skupinách, se obrátí, když uvažujeme skupiny dohromady.
- Příklad: Úspěšnost léčby ledvinových kamenů (Charig et al., 1986)

Simpsonův paradox

- pojmenován po Edwardu H. Simpsonovi, který jej popsal v roce 1951. Pravdou ale je, že Karl Pearson ho zmínil již v roce 1899 a Udny Yule v roce 1903.
- spočívá v tom, že trend, který se samostatně vyskytuje v jednotlivých skupinách, se obrátí, když uvažujeme skupiny dohromady.
- Příklad: Úspěšnost léčby ledvinových kamenů (Charig et al., 1986)

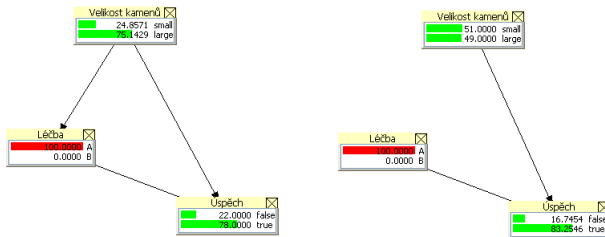
	Léčba A	Léčba B
	klasická operace	perkutánní nefrolitotomie
malé kameny	93%	87%
velké kameny	73%	69%
Dohromady	78%	83%

Simpsonův paradox

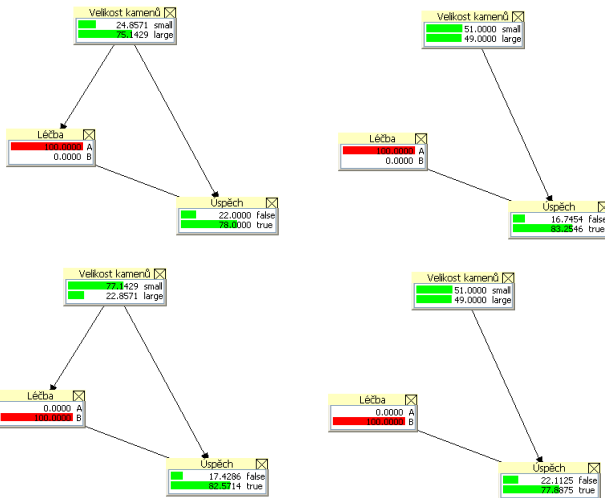
- pojmenován po Edwardu H. Simpsonovi, který jej popsal v roce 1951. Pravdou ale je, že Karl Pearson ho zmínil již v roce 1899 a Udny Yule v roce 1903.
- spočívá v tom, že trend, který se samostatně vyskytuje v jednotlivých skupinách, se obrátí, když uvažujeme skupiny dohromady.
- Příklad: Úspěšnost léčby ledvinových kamenů (Charig et al., 1986)

	Léčba A klasická operace	Léčba B perkutánní nefrolitotomie
malé kameny	93% (87 případů)	87% (270 případů)
velké kameny	73% (263 případů)	69% (80 případů)
Dohromady	78% (350 případů)	83% (350 případů)

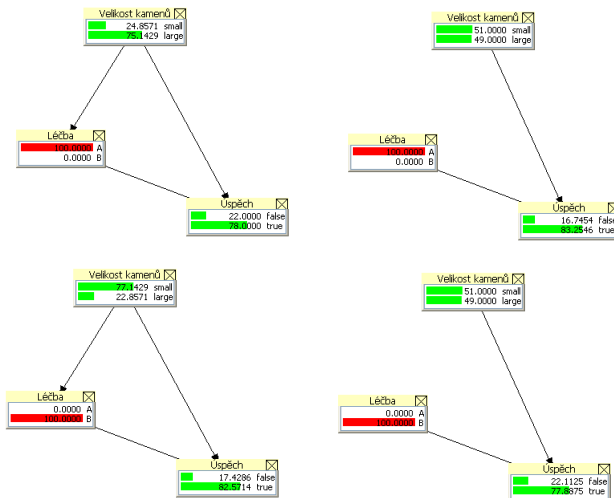
Simpsonův paradox - Léčba ledvinových kamenů



Simpsonův paradox - Léčba ledvinových kamenů



Simpsonův paradox - Léčba ledvinových kamenů



Srovnání je třeba provádět na náhodně vybraném vzorku pacientů.

Hledání optimální strategie opravy - technická diagnostika

- Příčiny problému (závady) $C \in \mathcal{C}$.

Hledání optimální strategie opravy - technická diagnostika

- Příčiny problému (závady) $C \in \mathcal{C}$.
- Akce $A \in \mathcal{A}$ - opravné kroky, které mohou odstranit závadu.

Hledání optimální strategie opravy - technická diagnostika

- Příčiny problému (závady) $C \in \mathcal{C}$.
- Akce $A \in \mathcal{A}$ - opravné kroky, které mohou odstranit závadu.
- Otázky $Q \in \mathcal{Q}$ - kroky, které mohou pomoci identifikovat, kde je závada.

Hledání optimální strategie opravy - technická diagnostika

- Příčiny problému (závady) $C \in \mathcal{C}$.
- Akce $A \in \mathcal{A}$ - opravné kroky, které mohou odstranit závadu.
- Otázky $Q \in \mathcal{Q}$ - kroky, které mohou pomoci identifikovat, kde je závada.
- Ke každé akci i otázce je přiřazena cena (c_A značí cenu akce A , c_Q cenu otázky Q).
Cena může znamenat:
 - dobu potřebnou k provedení akce či otázky,
 - cenu za náhradní díl, který použijeme
 - rizikovost akce
 - kombinaci výše uvedeného.

Technická diagnostika laserové tiskárny

Trouble: světlý tisk.

Troubleshooter: doporučí kroky, které pomohou odstranit “trouble”

Technická diagnostika laserové tiskárny

Trouble: světlý tisk.

Troubleshooter: doporučí kroky, které pomohou odstranit “trouble”

Akce a otázky	cena
A_1 : Remove, shake and reseal toner	5
A_2 : Try another toner	15
A_3 : Cycle power	1
Q_1 : Is the printer configuration page printed light?	2

Technická diagnostika laserové tiskárny

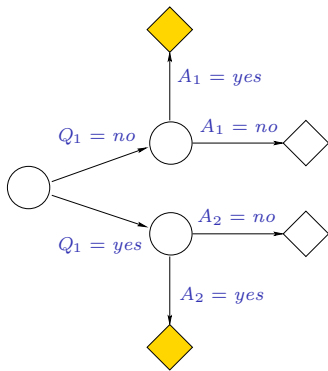
Trouble: světlý tisk.

Troubleshooter: doporučí kroky, které pomohou odstranit “trouble”

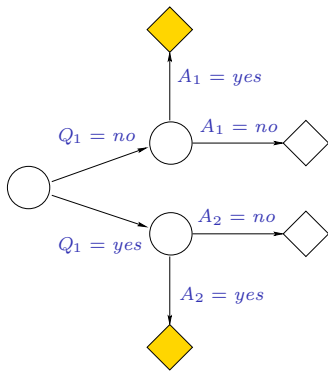
Akce a otázky	cena
A_1 : Remove, shake and reseal toner	5
A_2 : Try another toner	15
A_3 : Cycle power	1
Q_1 : Is the printer configuration page printed light?	2

Možné závady při světlém tisku	$P(C_i)$
C_1 : Toner low	0.4
C_2 : Defective toner	0.3
C_3 : Corrupted dataflow	0.2
C_4 : Wrong driver setting	0.1

Hledání optimální strategie opravy - technická diagnostika

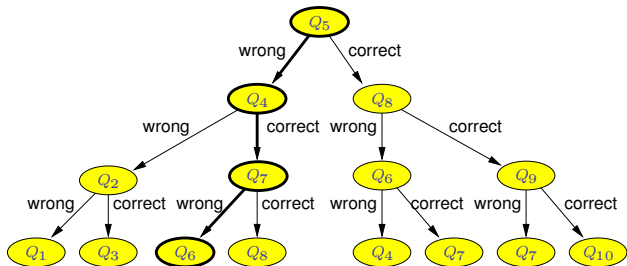
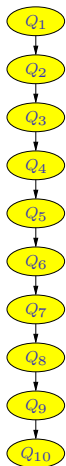


Hledání optimální strategie opravy - technická diagnostika



Strategie	očekávaná cena opravy (ECR)
$Q_1 \left\{ \begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \end{array} \right.$	$p(Q_1 = no, A_1 = yes) \cdot (c_{Q_1} + c_{A_1} + 0)$
	$+ p(Q_1 = no, A_1 = no) \cdot (c_{Q_1} + c_{A_1} + c_{CS})$
	$+ p(Q_1 = yes, A_2 = yes) \cdot (c_{Q_1} + c_{A_2} + 0)$
	$+ p(Q_1 = yes, A_2 = no) \cdot (c_{Q_1} + c_{A_2} + c_{CS})$

Adaptivní test znalostí



Příklad testu: Matematické operace se zlomky

	Dovednost	Příklad
CP	Porovnávání (společný čítel nebo jmenovatel)	$\frac{1}{2} > \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3} > \frac{1}{3}$
AD	Sčítání (společný jmenovatel)	$\frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{1+2}{7} = \frac{3}{7}$
SB	Odčítání (společný jmenovatel)	$\frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2-1}{5} = \frac{1}{5}$
MT	Násobení	$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$
CD	Převod na společný jmenovatel	$\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{3}{6}, \frac{4}{6}\right)$
CL	Krácení	$\frac{4}{6} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$
CIM	Převod na smíšené zlomky	$\frac{7}{2} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{2} = 3\frac{1}{2}$
CMI	Převod na nepravé zlomky	$3\frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{2} = \frac{7}{2}$

Mylné postupy (Misconceptions)

	Příklad	Četnost výskytu v datech
MAD	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$	14.8%
MSB	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$	9.4%
MMT1	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b}$	14.1%
MMT2	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b \cdot b}$	8.1%
MMT3	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$	15.4%
MMT4	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b+d}$	8.1%
MC	$a \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$	4.0%

Model pro úlohu $T1$

$$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}\right) - \frac{1}{8} = \frac{15}{24} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8} - \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Model pro úlohu $T1$

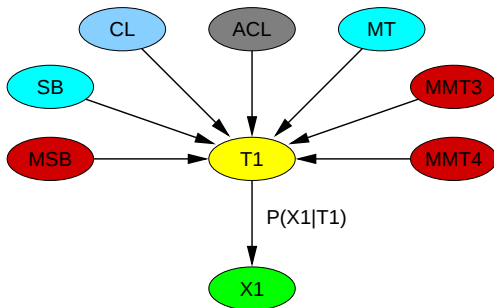
$$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}\right) - \frac{1}{8} = \frac{15}{24} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8} - \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$T1 \Leftrightarrow MT \ \& \ CL \ \& \ ACL \ \& \ SB \ \& \ \neg MMT3 \ \& \ \neg MMT4 \ \& \ \neg MSB$$

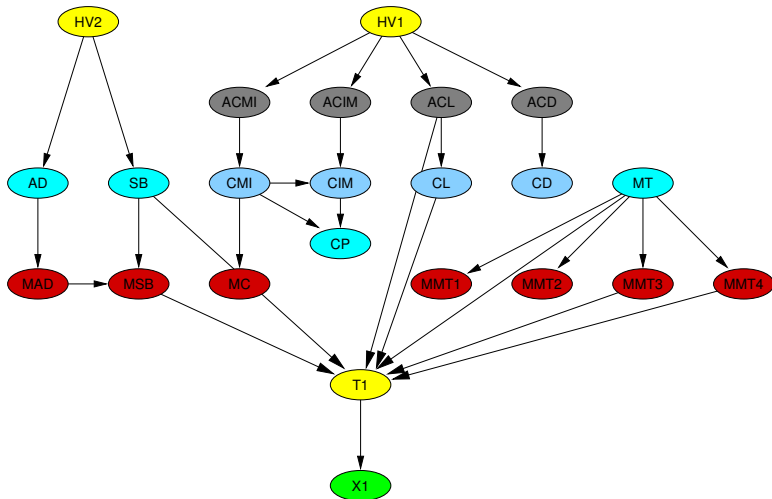
Model pro úlohu T1

$$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}\right) - \frac{1}{8} = \frac{15}{24} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8} - \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

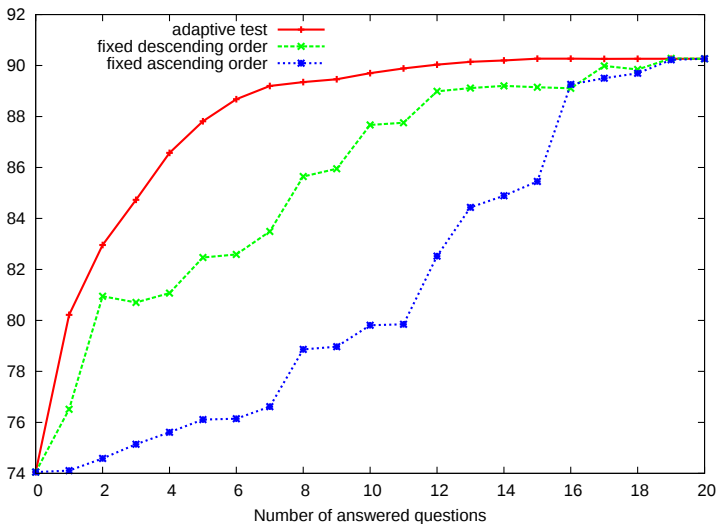
$$T1 \Leftrightarrow MT \ \& \ CL \ \& \ ACL \ \& \ SB \ \& \ \neg MMT3 \ \& \ \neg MMT4 \ \& \ \neg MSB$$



Model studenta spojený s modelom pro otázku T_1



Kvalita predikce jednotlivých dovedností



Výzkum v oblasti bayesovských sítí

- Metody efektivního výpočtu podmíněných pravděpodobností

Výzkum v oblasti bayesovských sítí

- Metody efektivního výpočtu podmíněných pravděpodobností
- Metody učení bayesovských sítí z dat

Výzkum v oblasti bayesovských sítí

- Metody efektivního výpočtu podmíněných pravděpodobností
- Metody učení bayesovských sítí z dat
- Studium speciálních typů podmíněných pravděpodobností

Výzkum v oblasti bayesovských sítí

- Metody efektivního výpočtu podmíněných pravděpodobností
- Metody učení bayesovských sítí z dat
- Studium speciálních typů podmíněných pravděpodobností
- Aplikace bayesovských sítí

Shrnutí

- Rozhodování je možné definovat jako hledání alternativy, která **maximalizuje očekávaný užitek**.

Shrnutí

- Rozhodování je možné definovat jako hledání alternativy, která **maximalizuje očekávaný užitek**.
- Rozhodování často probíhá za **nejistoty**.

Shrnutí

- Rozhodování je možné definovat jako hledání alternativy, která **maximalizuje očekávaný užitek**.
- Rozhodování často probíhá za **nejistoty**.
- Nejistota se často dá formalizovat pomocí **pravděpodobnosti** očekávaného jevu.

Shrnutí

- Rozhodování je možné definovat jako hledání alternativy, která **maximalizuje očekávaný užitek**.
- Rozhodování často probíhá za **nejistoty**.
- Nejistota se často dá formalizovat pomocí **pravděpodobnosti** očekávaného jevu.
- **Bayesovské sítě** umožňují výpočet podmíněných pravděpodobností i v problémech popsáných velkým počtem proměnných.

Shrnutí

- Rozhodování je možné definovat jako hledání alternativy, která **maximalizuje očekávaný užitek**.
- Rozhodování často probíhá za **nejistoty**.
- Nejistota se často dá formalizovat pomocí **pravděpodobnosti** očekávaného jevu.
- **Bayesovské sítě** umožňují výpočet podmíněných pravděpodobností i v problémech popsanych velkým počtem proměnných.
- Bayesovské sítě tak mohou dobře posloužit jako **nástroj pro podporu rozhodování**.