

Příklady aplikací bayesovských sítí

Jiří Vomlel

Ústav teorie informace a automatizace (ÚTIA)
Akademie věd České republiky
<http://www.utia.cz/vomlel>

Praha, 16. prosince 2014

Obsah přednášky

- Příklad bayesovské sítě a možných výpočtů

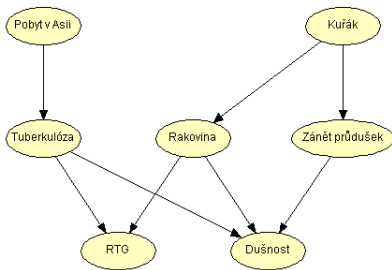
Obsah přednášky

- Příklad bayesovské sítě a možných výpočtů
- Aplikace 1: Technická diagnostika

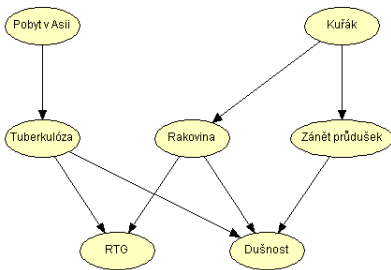
Obsah přednášky

- Příklad bayesovské sítě a možných výpočtů
- Aplikace 1: Technická diagnostika
- Aplikace 2: Adaptivní testování znalostí

Zjednodušený diagnostický model - Plicní klinika



Zjednodušený diagnostický model - Plicní klinika



Zadááme pouze:

$P(\text{Pobyt v Asii})$

$P(\text{Kuřák})$

$P(\text{Tuberkulóza} \mid \text{Pobyt v Asii})$

$P(\text{Rakovina} \mid \text{Kuřák})$

$P(\text{Zánět průdušek} \mid \text{Kuřák})$

$P(\text{RTG} \mid \text{Tuberkulóza}, \text{Rakovina})$

$P(\text{Dušnost} \mid \text{Tuberkulóza}, \text{Rakovina}, \text{Zánět průdušek})$

$P(\text{RTG} \mid \text{Tuberkulóza, Rakovina})$

Nejprve předpokládejme, že RTG je pozitivní právě tehdy, když pacient má tuberkulózu nebo rakovinu.

RTG	Tuberkulóza	Rakovina	p
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

P(RTG | Tuberkulóza, Rakovina)

Připustíme, že RTG může být pozitivní i z jiného důvodu a nemusí být nutně pozitivní ikdyž pacient má tuberkulózu nebo rakovinu.

RTG	Tuberkulóza	Rakovina	p	p'	
0	0	0	1	p_0	0.95
0	0	1	0	$p_0 * p_1$	0.019
0	1	0	0	$p_0 * p_2$	0.019
0	1	1	0	$p_0 * p_1 * p_2$	0.00038
1	0	0	0	$1 - p_0$	0.05
1	0	1	1	$1 - p_0 * p_1$	0.981
1	1	0	1	$1 - p_0 * p_2$	0.981
1	1	1	1	$1 - p_0 * p_1 * p_2$	0.99962
				$p_0, p_1, p_2 \in \langle 0, 1 \rangle$	

P(RTG | Tuberkulóza, Rakovina)

Připustíme, že RTG může být pozitivní i z jiného důvodu a nemusí být nutně pozitivní ikdyž pacient má tuberkulózu nebo rakovinu.

RTG	Tuberkulóza	Rakovina	p	p'	
0	0	0	1	p_0	0.95
0	0	1	0	$p_0 * p_1$	0.019
0	1	0	0	$p_0 * p_2$	0.019
0	1	1	0	$p_0 * p_1 * p_2$	0.00038
1	0	0	0	$1 - p_0$	0.05
1	0	1	1	$1 - p_0 * p_1$	0.981
1	1	0	1	$1 - p_0 * p_2$	0.981
1	1	1	1	$1 - p_0 * p_1 * p_2$	0.99962
				$p_0, p_1, p_2 \in \langle 0, 1 \rangle$	

Tento lokální model v bayesovské síti se nazývá „logické NEBO se šumem“ (noisy-or).

P(RTG | Tuberkulóza, Rakovina)

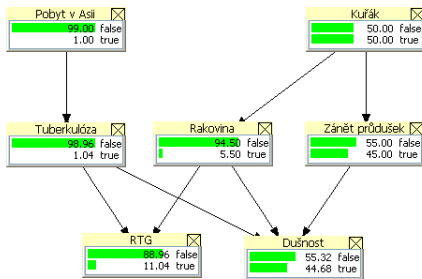
Připustíme, že RTG může být pozitivní i z jiného důvodu a nemusí být nutně pozitivní ikdyž pacient má tuberkulózu nebo rakovinu.

RTG	Tuberkulóza	Rakovina	p	p'	
0	0	0	1	p_0	0.95
0	0	1	0	$p_0 * p_1$	0.019
0	1	0	0	$p_0 * p_2$	0.019
0	1	1	0	$p_0 * p_1 * p_2$	0.00038
1	0	0	0	$1 - p_0$	0.05
1	0	1	1	$1 - p_0 * p_1$	0.981
1	1	0	1	$1 - p_0 * p_2$	0.981
1	1	1	1	$1 - p_0 * p_1 * p_2$	0.99962
				$p_0, p_1, p_2 \in \langle 0, 1 \rangle$	

Tento lokální model v bayesovské síti se nazývá „**logické NEBO se šumem**“ (noisy-or).

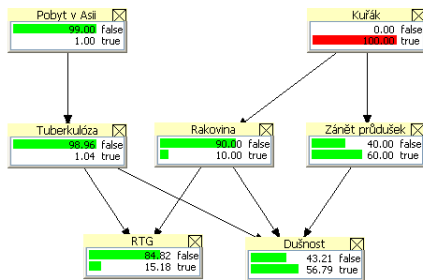
Pro jeho definici potřebujeme $k + 1$ hodnot p_0, p_1, \dots, p_k , kde k je počet rodičů dané proměnné.

Příklad výpočtu v bayesovské síti



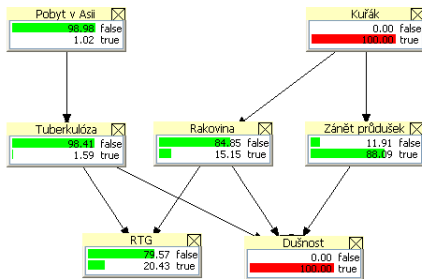
apriorní pravděpodobnost $P(X)$ všech veličin X

Příklad výpočtu v bayesovské síti



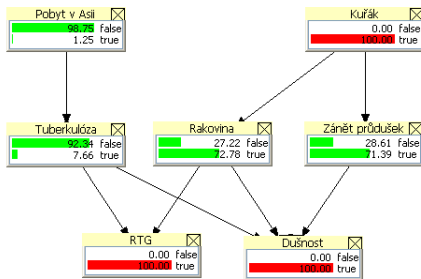
podmíněná pravděpodobnost $P(X|Kuřák)$

Příklad výpočtu v bayesovské síti



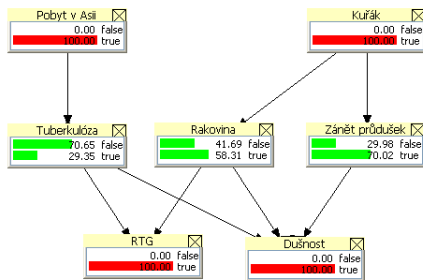
podmíněná pravděpodobnost $P(X|Kuřák, Dušnost)$

Příklad výpočtu v bayesovské síti



podmíněná pravděpodobnost $P(X|\text{Kuřák, Dušnost, RTG})$

Příklad výpočtu v bayesovské síti



podmíněná pravděpodobnost
 $P(X | \text{Kuřák, Dušnost, RTG, Pobyť v Asii})$

Technická diagnostika – optimální strategie opravy

- Příčiny problému (závady) $C \in \mathcal{C}$.

Technická diagnostika – optimální strategie opravy

- Příčiny problému (závady) $C \in \mathcal{C}$.
- Akce $A \in \mathcal{A}$ - opravné kroky, které mohou odstranit závadu.

Technická diagnostika – optimální strategie opravy

- Příčiny problému (závady) $C \in \mathcal{C}$.
- Akce $A \in \mathcal{A}$ - opravné kroky, které mohou odstranit závadu.
- Otázky $Q \in \mathcal{Q}$ - kroky, které mohou pomoci identifikovat, kde je závada.

Technická diagnostika – optimální strategie opravy

- Příčiny problému (závady) $C \in \mathcal{C}$.
- Akce $A \in \mathcal{A}$ - opravné kroky, které mohou odstranit závadu.
- Otázky $Q \in \mathcal{Q}$ - kroky, které mohou pomoci identifikovat, kde je závada.
- Ke každé akci i otázce je přiřazena cena (c_A značí cenu akce A , c_Q cenu otázky Q).
Cena může znamenat:
 - dobu potřebnou k provedení akce či otázky,
 - cenu za náhradní díl, který použijeme
 - rizikovost akce
 - kombinaci výše uvedeného.

Technická diagnostika laserové tiskárny

Trouble: světlý tisk.

Troubleshooter: doporučí kroky, které vedou k odstranění “trouble”

Technická diagnostika laserové tiskárny

Trouble: světlý tisk.

Troubleshooter: doporučí kroky, které vedou k odstranění “trouble”

Akce a otázky	cena
A_1 : Remove, shake and reseal toner	5
A_2 : Try another toner	15
A_3 : Cycle power	1
Q_1 : Is the printer configuration page printed light?	2

Technická diagnostika laserové tiskárny

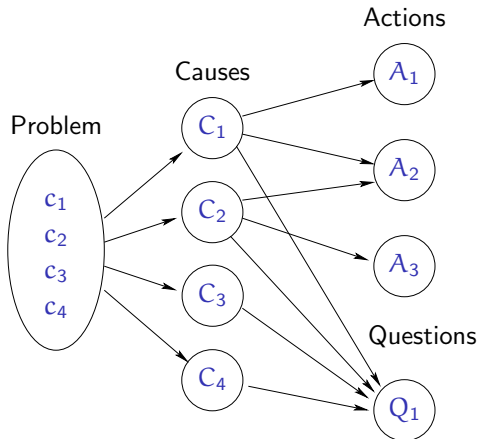
Trouble: světlý tisk.

Troubeshooter: doporučí kroky, které vedou k odstranění “trouble”

Akce a otázky	cena
A_1 : Remove, shake and reseal toner	5
A_2 : Try another toner	15
A_3 : Cycle power	1
Q_1 : Is the printer configuration page printed light?	2

Možné závady při světlém tisku	$P(C_i)$
C_1 : Toner low	0.4
C_2 : Defective toner	0.3
C_3 : Corrupted dataflow	0.2
C_4 : Wrong driver setting	0.1

Bayesovská síť pro problém světlého tisku



Očekávaná cena opravy - ECR

- Strategie může skončit neúspěšně - např. jsme vyčerpali všechny možné akce:
 - uplatní se penalizace $c(e_\ell)$
 - penalizací může být např. cena, kterou zaplatíme za zavolání servisních techniků

Očekávaná cena opravy - ECR

- Strategie může skončit neúspěšně - např. jsme vyčerpali všechny možné akce:
 - uplatní se penalizace $c(e_\ell)$
 - penalizací může být např. cena, kterou zaplatíme za zavolání servisních techniků
- Strategie může končit vyřešením problému $c(e_\ell) = 0$.

Očekávaná cena opravy - ECR

- Strategie může skončit neúspěšně - např. jsme vyčerpali všechny možné akce:
 - uplatní se penalizace $c(e_\ell)$
 - penalizací může být např. cena, kterou zaplatíme za zavolání servisních techniků
- Strategie může končit vyřešením problému $c(e_\ell) = 0$.
- Získaná evidence

$$e = \left\{ \begin{array}{l} A = \text{yes/no}, A \in \text{Provedené akce}, \\ Q = \text{yes/no}, Q \in \text{Zodpovězené otázky} \end{array} \right\}$$

Očekávaná cena opravy - ECR

- Strategie může skončit neúspěšně - např. jsme vyčerpali všechny možné akce:
 - uplatní se penalizace $c(e_\ell)$
 - penalizací může být např. cena, kterou zaplatíme za zavolání servisních techniků
- Strategie může končit vyřešením problému $c(e_\ell) = 0$.
- Získaná evidence

$$e = \left\{ \begin{array}{l} A = \text{yes/no}, A \in \text{Provedené akce}, \\ Q = \text{yes/no}, Q \in \text{Zodpovězené otázky} \end{array} \right\}$$

- $P(e)$... pravděpodobnost evidence e

Očekávaná cena opravy - ECR

- Strategie může skončit neúspěšně - např. jsme vyčerpali všechny možné akce:
 - uplatní se penalizace $c(e_\ell)$
 - penalizací může být např. cena, kterou zaplatíme za zavolání servisních techniků
- Strategie může končit vyřešením problému $c(e_\ell) = 0$.
- Získaná evidence

$$e = \left\{ \begin{array}{l} A = \text{yes/no}, A \in \text{Provedené akce}, \\ Q = \text{yes/no}, Q \in \text{Zodpovězené otázky} \end{array} \right\}$$

- $P(e)$... pravděpodobnost evidence e
- $t(e)$... celková cena provedených akcí a otázek

Očekávaná cena opravy - ECR

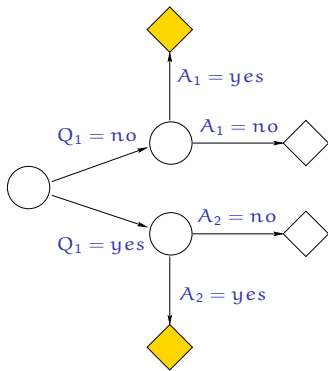
- Strategie může skončit neúspěšně - např. jsme vyčerpali všechny možné akce:
 - uplatní se penalizace $c(\mathbf{e}_\ell)$
 - penalizací může být např. cena, kterou zaplatíme za zavolání servisních techniků
- Strategie může končit vyřešením problému $c(\mathbf{e}_\ell) = 0$.
- Získaná evidence

$$\mathbf{e} = \left\{ \begin{array}{l} A = \text{yes/no}, A \in \text{Provedené akce}, \\ Q = \text{yes/no}, Q \in \text{Zodpovězené otázky} \end{array} \right\}$$

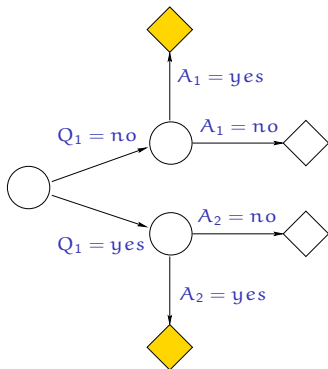
- $P(\mathbf{e})$... pravděpodobnost evidence \mathbf{e}
- $t(\mathbf{e})$... celková cena provedených akcí a otázek

$$\text{ECR}(\mathbf{s}) = \sum_{\ell \in \text{Listy strategie } \mathbf{s}} P(\mathbf{e}_\ell) \cdot (t(\mathbf{e}_\ell) + c(\mathbf{e}_\ell))$$

Ohodnocení strategie opravy - ECR



Ohodnocení strategie opravy - ECR



Strategie	očekávaná cena opravy (ECR)
$Q_1 \left\{ \begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \end{array} \right.$	$p(Q_1 = \text{no}, A_1 = \text{yes}) \cdot (c_{Q_1} + c_{A_1} + 0)$
	$+ p(Q_1 = \text{no}, A_1 = \text{no}) \cdot (c_{Q_1} + c_{A_1} + c_{CS})$
	$+ p(Q_1 = \text{yes}, A_2 = \text{yes}) \cdot (c_{Q_1} + c_{A_2} + 0)$
	$+ p(Q_1 = \text{yes}, A_2 = \text{no}) \cdot (c_{Q_1} + c_{A_2} + c_{CS})$

Cíl technické diagnostiky

Cíl: nalézt strategii s^* takovou, že pro všechny strategie s platí

$$ECR(s^*) \leq ECR(s) .$$

Cíl technické diagnostiky

Cíl: nalézt strategii s^* takovou, že pro všechny strategie s platí

$$\text{ECR}(s^*) \leq \text{ECR}(s) .$$

Polynomiálně řešitelná úloha

Cíl technické diagnostiky

Cíl: nalézt strategii s^* takovou, že pro všechny strategie s platí

$$ECR(s^*) \leq ECR(s) .$$

Polynomiálně řešitelná úloha

(1) každá akce řeší právě jednu závadu,

Cíl technické diagnostiky

Cíl: nalézt strategii s^* takovou, že pro všechny strategie s platí

$$ECR(s^*) \leq ECR(s) .$$

Polynomiálně řešitelná úloha

- (1) každá akce řeší právě jednu závadu,
- (2) všechny akce jsou navzájem podmíněně nezávislé při známých příčinách

Cíl technické diagnostiky

Cíl: nalézt strategii s^* takovou, že pro všechny strategie s platí

$$ECR(s^*) \leq ECR(s) .$$

Polynomiálně řešitelná úloha

- (1) každá akce řeší právě jednu závadu,
- (2) všechny akce jsou navzájem podmíněně nezávislé při známých příčinách
- (3) platí, že zařízení má v jednom okamžiku pouze jednu závadu (single fault assumption)

Cíl technické diagnostiky

Cíl: nalézt strategii s^* takovou, že pro všechny strategie s platí

$$ECR(s^*) \leq ECR(s) .$$

Polynomiálně řešitelná úloha

- (1) každá akce řeší právě jednu závadu,
- (2) všechny akce jsou navzájem podmíněně nezávislé při známých příčinách
- (3) platí, že zařízení má v jednom okamžiku pouze jednu závadu (single fault assumption)

NP-těžká úloha

Cíl technické diagnostiky

Cíl: nalézt strategii s^* takovou, že pro všechny strategie s platí

$$ECR(s^*) \leq ECR(s) .$$

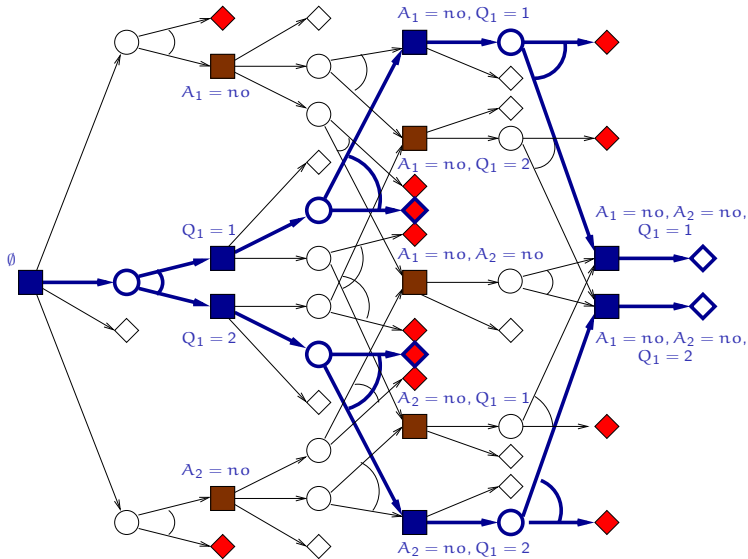
Polynomiálně řešitelná úloha

- (1) každá akce řeší právě jednu závadu,
- (2) všechny akce jsou navzájem podmíněně nezávislé při známých příčinách
- (3) platí, že zařízení má v jednom okamžiku pouze jednu závadu (single fault assumption)

NP-těžká úloha

- (1) některé akce řeší více než dvě závady

Reprezentace prostoru všech řešení AND/OR grafem



Algoritmy pro nalezení optimálního řešení

- využití metod prohledávání stavového prostoru:

Algoritmy pro nalezení optimálního řešení

- využití metod prohledávání stavového prostoru:
- metoda větví a mezí (branch and bound)

Algoritmy pro nalezení optimálního řešení

- využití metod prohledávání stavového prostoru:
- metoda větví a mezí (branch and bound)
- metody dynamického programování

Algoritmy pro nalezení optimálního řešení

- využití metod prohledávání stavového prostoru:
- metoda větví a mezí (branch and bound)
- metody dynamického programování
- A^* pro AND/OR grafy

Algoritmy pro nalezení optimálního řešení

- využití metod prohledávání stavového prostoru:
- metoda větví a mezí (branch and bound)
- metody dynamického programování
- A^* pro AND/OR grafy

Prohledávání prostoru všech řešení je výpočetně náročné.

Suboptimální řešení v reálném čase

BATS troubleshooter:

- Vyvinutý v rámci společného projektu Hewlett-Packard a Aalborg University.

Suboptimální řešení v reálném čase

BATS troubleshooter:

- Vyvinutý v rámci společného projektu Hewlett-Packard a Aalborg University.
- Využívá několik heuristik založených na poměru p/c .

Suboptimální řešení v reálném čase

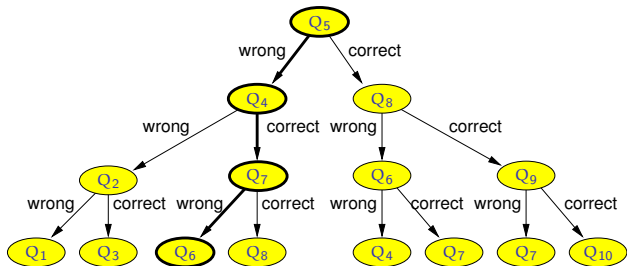
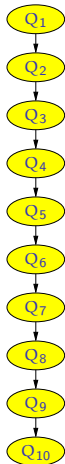
BATS troubleshooter:

- Vyvinutý v rámci společného projektu Hewlett-Packard a Aalborg University.
- Využívá několik heuristik založených na poměru p/c .

Porovnání optimálního řešení s BATS troubleshooterem

Problem	$ \mathcal{A} $	$ \mathcal{Q} $	OPTIM	BATS
53	6	2	433.238	443.305
Tray	9	3	129.214	129.214
Overrun	11	3	106.204	112.456
Load	12	3	38.3777	38.4229
Pjam	13	4	124.323	124.365
Scatter	14	4	115.410	115.862
NotDupl	9	9	70.6740	73.5984
Spots	16	5	161.385	162.246
MIO1	10	10	250.452	253.310

Adaptivní test znalostí



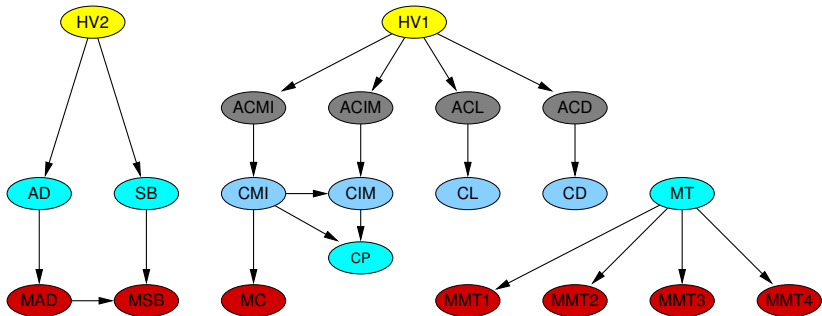
Příklad testu: Matematické operace se zlomky

	Dovednost	Příklad
CP	Porovnávání (společný čítecil nebo jmenovatel)	$\frac{1}{2} > \frac{1}{3}, \frac{2}{3} > \frac{1}{3}$
AD	Sčítání (společný jmenovatel)	$\frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{1+2}{7} = \frac{3}{7}$
SB	Odčítání (společný jmenovatel)	$\frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2-1}{5} = \frac{1}{5}$
MT	Násobení	$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$
CD	Převod na společný jmenovatel	$(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}) = (\frac{3}{6}, \frac{4}{6})$
CL	Krácení	$\frac{4}{6} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$
CIM	Převod na smíšené zlomky	$\frac{7}{2} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{2} = 3\frac{1}{2}$
CMI	Převod na nepravé zlomky	$3\frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{2} = \frac{7}{2}$

Mylné postupy (Misconceptions)

	Příklad	Četnost výskytu v datech
MAD	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$	14.8%
MSB	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$	9.4%
MMT1	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b}$	14.1%
MMT2	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b \cdot b}$	8.1%
MMT3	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$	15.4%
MMT4	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b+d}$	8.1%
MC	$a \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$	4.0%

Model studenta



Model pro úlohu T₁

$$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}\right) - \frac{1}{8} = \frac{15}{24} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8} - \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Model pro úlohu T₁

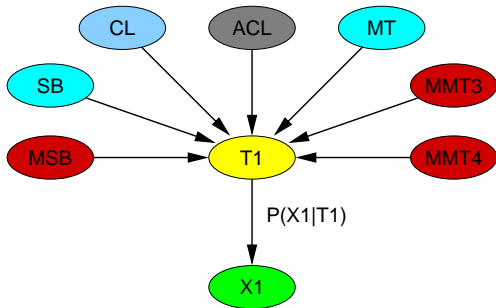
$$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}\right) - \frac{1}{8} = \frac{15}{24} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8} - \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

T₁ ⇔ MT & CL & ACL & SB & ¬MMT3 & ¬MMT4 & ¬MSB

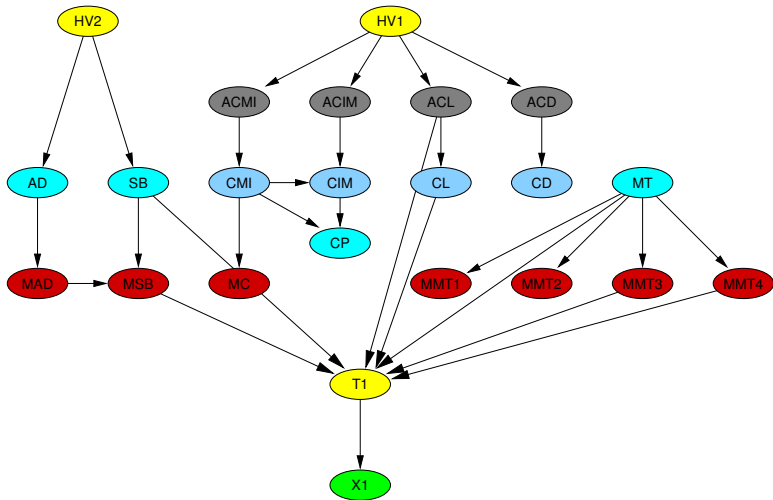
Model pro úlohu T₁

$$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}\right) - \frac{1}{8} = \frac{15}{24} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8} - \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

T₁ ⇔ MT & CL & ACL & SB & ¬MMT3 & ¬MMT4 & ¬MSB



Model studenta spojený s modelom pro úlohu T_1



Adaptivní test

Opakujeme dva základní kroky:

1. odhadujeme úroveň jednotlivých znalostí studenta

Adaptivní test

Opakujeme dva základní kroky:

1. odhadujeme úroveň jednotlivých znalostí studenta
2. vybíráme vhodnou otázku na základě odhadu úrovně znalostí

Adaptivní test

Opakujeme dva základní kroky:

1. odhadujeme úroveň jednotlivých znalostí studenta
2. vybíráme vhodnou otázku na základě odhadu úrovně znalostí

Entropie jako míra informace:

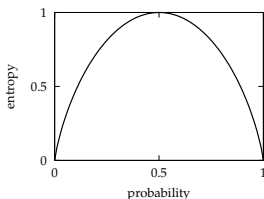
Adaptivní test

Opakujeme dva základní kroky:

1. odhadujeme úroveň jednotlivých znalostí studenta
2. vybíráme vhodnou otázku na základě odhadu úrovně znalostí

Entropie jako míra informace:

- $H(P(\mathbf{S})) = - \sum_{\mathbf{s}} P(\mathbf{S} = \mathbf{s}) \cdot \log P(\mathbf{S} = \mathbf{s})$



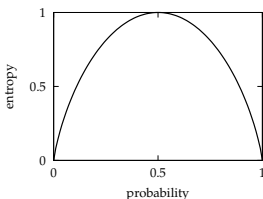
Adaptivní test

Opakujeme dva základní kroky:

1. odhadujeme úroveň jednotlivých znalostí studenta
2. vybíráme vhodnou otázku na základě odhadu úrovně znalostí

Entropie jako míra informace:

- $H(P(S)) = - \sum_s P(S = s) \cdot \log P(S = s)$



- Čím je entropie nižší tím více toho o znalostech studenta víme.

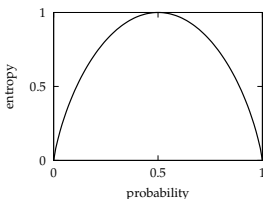
Adaptivní test

Opakujeme dva základní kroky:

1. odhadujeme úroveň jednotlivých znalostí studenta
2. vybíráme vhodnou otázku na základě odhadu úrovně znalostí

Entropie jako míra informace:

- $H(P(S)) = - \sum_s P(S = s) \cdot \log P(S = s)$



- Čím je entropie nižší tím více toho o znalostech studenta víme.
- Hladový algoritmus: V každém kroku vybereme otázku, která nejvíce snižuje entropii.

Kvalita predikce jednotlivých dovedností

