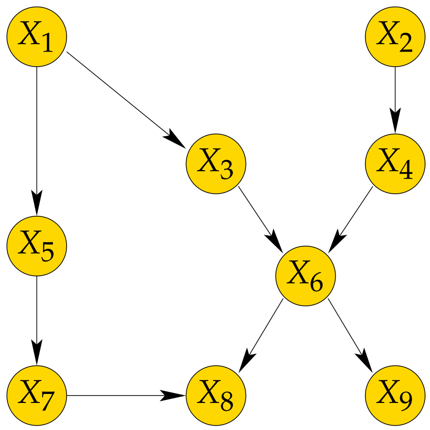
Podmíněné nezávislosti dané grafem

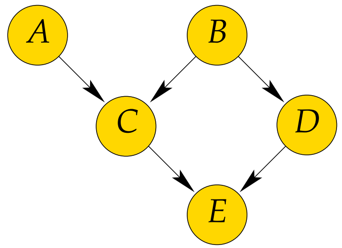
Předpokládejme uspořádání veličin $X_i, i \in V$ takové, že jestliže $j \in pa(i)$ pak $j < i$.



Z grafu vyplývají následující podmíněné nezávislosti

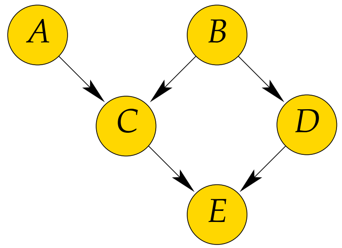
$$X_i \perp\!\!\!\perp X_k \mid (X_j)_{j \in pa(i)} \qquad \text{for } i \in V \text{ and } k < i \text{ and } k \notin pa(i)$$

Podmíněné nezávislosti dané grafem



Otázky:

- Nalezněte pořadí splňující požadavek na uspořádání:
  jestliže $j \in pa(i)$ pak $j < i$.
- Kolik je uspořádáních splňující tento požadavek?
- Jaké nezávislosti plynou z daného uspořádání?
- Jaká pravděpodobnostní distribuce splňuje dané nezávislosti a platí, že její podmíněné marginální distribuce odpovídající distribucím $P(A)$, $P(B)$, $P(C \mid A, B)$, $P(D \mid B)$ a $P(E \mid C, D)$.



Pořadí splňující požadavek: jestliže $j \in pa(i)$ pak $j < i$ jsou

A	B	C	D	E	2	3	4	5
1	2	3	4	5	$B \perp\!\!\!\perp A$	-	$D \perp\!\!\!\perp A, C \mid B$	$E \perp\!\!\!\perp A, B \mid C, D$
2	1	3	4	5	$A \perp\!\!\!\perp B$	-	$D \perp\!\!\!\perp A, C \mid B$	$E \perp\!\!\!\perp A, B \mid C, D$
1	2	4	3	5	$B \perp\!\!\!\perp A$	$D \perp\!\!\!\perp A \mid B$	$C \perp\!\!\!\perp D \mid A, B$	$E \perp\!\!\!\perp A, B \mid C, D$
2	1	4	3	5	$A \perp\!\!\!\perp B$	$D \perp\!\!\!\perp A \mid B$	$C \perp\!\!\!\perp D \mid A, B$	$E \perp\!\!\!\perp A, B \mid C, D$
3	1	4	2	5	-	$A \perp\!\!\!\perp B$	$C \perp\!\!\!\perp D \mid A, B$	$E \perp\!\!\!\perp A, B \mid C, D$

Pravděpodobnostní distribuce splňující dané nezávislosti, jejíž podmíněné marginální distribuce odpovídají zadaným distribucím, je právě jedna (stejná pro všechna uspořádádní):

$$P(A) \cdot P(B) \cdot P(C \mid A, B) \cdot P(D \mid B) \cdot P(E \mid C, D)$$

Jak ověřit podmíněnou nezávislost v grafu?

- Vytvořit seznam všech nezávislostí plynoucích z grafu a zjistit, zda-li se podmíněná nezávislost mezi nimi nachází - výpočetně náročné.
- Použít kritérium, pomocí kterého ověříme podmíněnou nezávislost přímo v grafu - d-separace.

D-separace

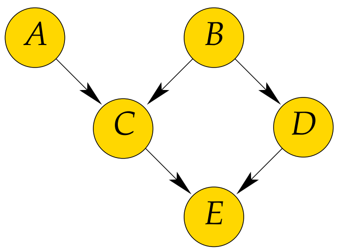
Dva uzly i a j jsou d-separovány množinou uzlů $\mathcal{Y}$, jestliže pro všechny cesty mezi i a j platí:

- cesta obsahuje uzel, ve kterém se hrany **nesetkávají** "head-to-head" a který **náleží** do $\mathcal{Y}$ nebo

- cesta obsahuje uzel, ve kterém se hrany **setkávají** "head-to-head" a ani on, ani žádný jeho následník **nenáleží** do $\mathcal{Y}$.

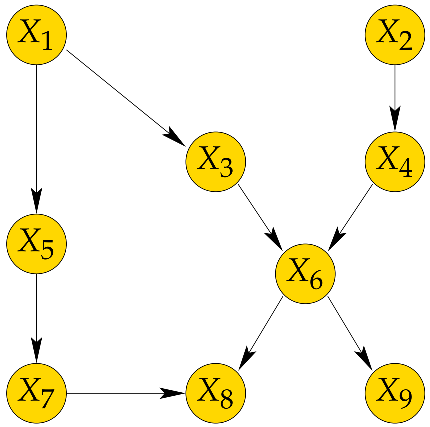
Jestliže i a j jsou d-separovány množinou uzlů $\mathcal{Y}$, pak veličiny X_i a X_j jsou nezávislé dáno $(X_k)_{k\in\mathcal{Y}}$.

Příklad:



$$A \perp\!\!\!\perp D$$
$$A \not\!\perp\!\!\!\perp D \mid E$$
$$C \not\!\perp\!\!\!\perp D$$
$$C \perp\!\!\!\perp D \mid B$$

D-separace



Zjistěte, zda-li v grafu platí:

$$X_1 \perp\!\!\!\perp X_8 \mid X_3?$$

$$X_1 \perp\!\!\!\perp X_8 \mid X_3, X_5?$$

$$X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \mid X_9?$$

Příklad v Huginu: `asia.net`